高等数学基础讲义

（数一）

课程配套讲义是学习的必备资源，帮帮为大家精心整理了高质量的配套讲义，确保同学们学习的方便与高效。该讲义是帮帮结合大纲考点及考研辅导名师多年辅导经验的基础上科学整理的。内容涵盖考研的核心考点、复习重点、难点。结构明了、脉络清晰，并针对不同考点、重点、难点做了不同颜色及字体的标注，以便同学们复习时可以快速投入、高效提升。

除课程配套讲义外，帮帮还从学习最贴切的需求出发，为大家提供以下服务，打造最科学、最高效、最自由的学习平台：

服务项目	**服务内容**
名师高清视频课	零距离跟名师学习，精讲考点，突出重点，拿下难点，掌握方法
习题+月考+模考	精选配套习题，灵活自测，查缺补漏，时时提升
真题视频解析	精选整理了近十几年的真题+答案，视频详解近五年真题
复习规划指导	名师零距离直播/录播指导全程考研复习规划
24 小时内答疑	24 小时内详尽解答您复习中的疑点难点，确保学习无阻碍

把青春托付给值得信任的平台！

祝：复习愉快，天天高效，考研成功！

PS:讲义中的不足之处，欢迎各位研研批评指正，我们将竭尽所能追求更好！

目录

第一章　函数极限与连续

1.1 函数的性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果对于任意 $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$，就一定有 $f(x_1) \le f(x_2), (f(x_1) \ge f(x_2))$ 则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的（减少）的。如果一定有 $f(x_1) < f(x_2), (f(x_1) > f(x_2))$ 则称 $f(x)$ 在 D 上是严格单调增加（减少）的。

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 D 上有定义，并且对于任意 $x \in D$，必有 $f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x))$ 则称 $f(x)$ 在 D 上是偶（奇）函数。

在直角坐标系 xoy 中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点 O 对称。

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是数集 D，如果存在常数 $T > 0$，当 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，并且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期。通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T（如果存在的话）。

例 1　设 $f\left(x\right)=\begin{cases} e^x, x<1, \\ x, x\ge 1, \end{cases}$ $\varphi\left(x\right)=\begin{cases} x+2, x<0, \\ x^2-1, x\ge 0, \end{cases}$ 求 $f\left(\varphi\left(x\right)\right)$。

解　$f\left(\varphi\left(x\right)\right)=\begin{cases} e^{x+2}, x<-1 \\ x+2, -1\le x<0 \\ e^{x^2-1}, 0\le x<\sqrt{2} \\ x^2-1, x\ge\sqrt{2} \end{cases}$

例 2 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{|x|\sin\left(x-2\right)}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2}$ 在下列哪个区间内有界　（）

（A）（-1,0）　（B）（0,1）　（C）（1,2）　（D）（2,3）

解 ：（A）

1.2 极限的概念及性质

1. 极限的定义：

（1）数列极限的定义：设$\{x_n\}$为一数列，若存在常数a，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

（2）函数极限的定义（分两种情况）：

（i）$x\to x_0$：设函数$y=f(x)$在点x_0的某一去心邻域有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总存在着正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$，则 A 就叫做函数$y=f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}$。

(ii) $x\to\infty$：设函数$y=f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总存在着正数 X，当满足$|x|>\mathrm{X}$时，有$|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$，则 A 就叫做函数$y=f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\mathrm{A}$。

【评注】：考研要求理解极限的概念，不要求应用ε,δ语言这种标准的“数学语言”，不要求用定义证明极限的存在性和求极限。

2. 极限的基本性质：

（1）数列极限的性质：

(i)唯一性：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一。

(ii)有界性：如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界（反之不成立）。

(iii)保号性：如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$（或$a<0$），那么存在正整数$N>0$，当$n>N$时，都有$x_n>0$（或$x_n<0$）。

推论:如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geq0$（或$x_n\leq0$），且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么$a\geq0$（或$a\leq0$）。

（2）函数极限的性质：

(i)唯一性：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么这极限唯一。

(ii)有界性：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}$，那么存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$f(x)\leq M$。

(iii)局部保号性：

1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$，且 $\mathrm{A}>0$（或 $\mathrm{A}<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$，如果存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），则 $\mathrm{A}\ \ge\ 0$（或 $\mathrm{A}\ \le\ 0$）。

3. 极限存在充要条件：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mathrm{A}$。

【评注】：极限性质中注意掌握保号性和有界性，在分析推理中常应用这一性质。

1.3 无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小。

2. 无穷大的定义：

设函数 $f(x)$ 在自变量 x_0 的某一去心邻域有定义，如果对于任意给定的正数 M，总存在正数 $\delta>0$（或者 X），只要 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>\mathrm{X}$），对应函数 $f(x)$ 总满足 $|f(x)|>\mathrm{X}$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大。

3. 无穷小的性质：

（1）无穷小与无穷大的关系：

在 x 的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小（$f(x)\neq 0$），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

（2）无穷小与极限的关系：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$　其中 $\lim\alpha(x)=0$。

（3）无穷小的运算性质：

（i）无穷小与有界函数的乘积仍然是无穷小。

（ii）有限个无穷小的和与乘积也是无穷小。

4. 无穷小阶的概念：

设 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，

（1）$l=0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 较高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$。

（2）$l=\infty$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 较低阶的无穷小。

（3）$l\neq 0$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同价无穷小，特别地，$l=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

5. 等价无穷小：

（1）等价无穷小的性质：若 $\beta\sim\alpha$，则 $\beta=\alpha+o(\alpha)$；若 $\alpha'\sim\alpha$，则 $\lim\alpha\beta=\lim\alpha'\beta$。

（2）常见的等价无穷小（当 $x\to 0$ 时）：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},a^{x}-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),(1+\beta x)^{\alpha}-1\sim\alpha\beta x$$

1.4 极限的求法（一）

1. 利用极限运算法则：

已知 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在，极限值分别为 A 和 B，则下列极限都存在，且有：

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（2）$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},(\text{此时需}B\neq 0\text{成立})$

例 1 （1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{7}(1-2x)^{8}}{(3x+2)^{15}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^{2}+x-1}+x+1}{\sqrt{x^{2}+\sin x}}$。

解：（1）原式 $=\dfrac{2^{8}}{3^{15}}$

（2）原式=+1

【评注】：关于极限的存在性，即极限四则运算的法则外延，需注意以下几点：

（1）关于加减法：极限存在+/-极限不存在（包括极限是无穷大）=不存在

极限不存在+/-极限不存在（包括极限是无穷大）=不一定

（2）关于乘除法：极限存在*//极限不存在（包括极限是无穷大）=不一定

极限不存在*//极限不存在（包括极限是无穷大）=不一定

（3）若$\lim f=a\neq 0,\lim g=\infty$**，则**$\lim f\bullet g=\infty$**。**

（4）若f有界$,\lim g=\infty$**，则**$\lim f\pm g=\infty$**，但**$\lim fg$**不一定为**∞**。**

2. 利用两个重要极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

例 2 求极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin(\frac{\pi}{6}-x)\bullet\tan 3x$

解：（1）原式$=\frac{6}{5}$

（2）原式$=\frac{1}{3}$

1.5 极限的求法（二）

1. 利用等价无穷小：

当$x\to 0$时，下列函数都是无穷小（即极限是 0），且相互等价，即有：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},a^{x}-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),(1+\beta x)^{\alpha}-1\sim\alpha\beta x$$

当上面每个函数中的自变量 x 换成$g(x)$时（$g(x)\to 0$），仍有上面的等价。

【评注】：根据无穷小的性质，等价无穷小代换必须是整体代换，即一般作为乘、除的项可以代换，而加、减的项不能代换。

例 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

解：原式$=\dfrac{3}{2}e$

2. 利用洛必达法则：

假设当自变量 x 趋近于某一定值（或无穷大）时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1） $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都是 0 或都是无穷大；

（2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，且 $g(x)$ 的导数不为 0；

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或是无穷大），则极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也一定存在，且等于 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，

即 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

【评注】：利用两个重要极限、等价无穷小、洛比达法则是计算极限的主要方法，一般情况下三者交替反复使用。

例 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin x^4}$

解：原式$=\dfrac{1}{4}$

1.6 极限的求法（三）

1. 利用左右极限：

例 1 （1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$

（2） $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x-2}}}{1+e^{\frac{4}{x-2}}}+\dfrac{\sin(x-2)}{|x-2|}\right)$

2. 利用极限存在准则：

（1）夹逼准则：

(i)数列：如果数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$ 从某项起，存在 $n_0\in\mathrm{N}$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\le x_n\le z_n$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，那么数列 $\{x_n\}$ 极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。

(ii)函数：如果 $x\in \overset{0}{U}(x_0,r)$ 或 $|x|>\mathrm{M}$， $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A 。

（2）单调有界准则：如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，或者数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，则数列极限存在。

例 2 设 $a_k\left(k=1,2,\cdots,r\right)$ 为正的常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_r^n}$ ，

解：原极限= $\max\left\{a_1,a_2,\cdots a_r\right\}$

例 3 设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足 $0<x_1<\pi,\ x_{n+1}=\sin x_n\left(n=1,2,\cdots\right)$。

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。

解：（2）原式 $=e^{\frac{1}{6}}$

例 4 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\left(n=1,2\cdots\right)$，证明数列 $\left\{a_n\right\}$ 收敛

1.7 极限的求法（四）

1. 利用泰勒公式（$x\to 0$）：

（1） $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+o(x^2)$

（2） $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

（3） $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^4)$

（4） $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^5)$

（5）$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

例 1 $(1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$(2)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$

$(3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$

解：$(1)=-\dfrac{1}{12};(2)=-\dfrac{1}{2};(3)=-\dfrac{1}{12}$

1.8 极限的求法（五）

1. 利用定积分：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}})$

解：原式$=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

解：原式$=\dfrac{2}{\pi}$

2. 常用结论：

当 $n\to\infty$ 时

$n^{\frac{1}{n}}\to 1$，$a^{\frac{1}{n}}(a>0)\to 1$，$(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\to\max(a,b,c)$，$\dfrac{a^n}{n!}(a>0)\to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln^n x=0$

$\frac{1}{x}(x \to 0) \to \infty$， $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$，

$$e^x \to \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ +\infty, & x \to +\infty \end{cases}$$

1.9 函数的连续性

1. 函数连续性的概念：

（1）函数在一点连续的概念：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续的概念：如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，同时在区间端点 a 右连续，在区间端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

2. 函数的间断点：

（1）间断点定义：如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

（2）间断点分类：设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，其中分为以下两种情况，其中

（i）若 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 都存在，则称 x_0 为第一类间断点。第一间断点分为两类，其一： $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ 时称为可去间断点，其二： $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ 时称为跳跃间断点。

（ii）第一间断点以外的间断点为第二间断点。

3. 初等函数的连续性：

（1）在区间上连续的函数的和、差、积、商（分母不为零）都连续。

（2）由连续函数经有限次复合而成的复合函数在定义区间上连续。

（3）在区间上连续且单调的函数的反函数在对应区间上仍连续。

（4）基本初等函数、初等函数在定义区间内是连续的。

4. 闭区间上连续函数的性质：

（1）有界性定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界。

（2）最值定理：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m 。

（3）介值定理：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，其最大值和最小值分别为 M 和 m，则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$。

（4）零点存在定理：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$ 成立。

例 1 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为（）

(A)1
(B)2
(C)3
(D)无穷多个

答案：C

第二章　一元函数导数与微分

2.1 一元函数导数

1. 导数的定义：

（1）一阶导数的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应的函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f^{'}(x_0)$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

例 1 设 $f(0)=0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件为（）.

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f\left(1-\cos h\right)$ 存在（B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f\left(h-\sin h\right)$ 存在（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f\left(2h\right)-f\left(h\right)\right]$ 存在

解：B

例 2 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是（）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$ 存在，则 $f\left(0\right)=0$（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)+f\left(-x\right)}{x}$ 存在，则 $f\left(0\right)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$ 存在，则 $f'\left(0\right)$ 存在（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{x}$ 存在，则 $f'\left(0\right)=0$

解：D

（2）高阶导数的定义：

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处 n 阶可导，并称此极限为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^{(n)}f(x)}{dx^n}$ 等。

（3）单侧导数

（i）单侧导数的定义：

极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 与 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 分别为函数在 $x=x_0$ 处的左、右导数，分别为 $f_-'(x_0)$，$f_+'(x_0)$。

即 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

（ii）单侧导数的性质

1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f_-'(x_0)$，$f_+'(x_0)$ 存在且相等。

2）如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f_-'(b)$，$f_+'(a)$ 都存在，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可导。

例 3 设下列极限存在，试求

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(3+\sin^2 x\right)-f\left(3\right)}{2x^2}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2+\tan x\right)^{10}-\left(2-\sin x\right)^{10}}{\sin x}$

解：①原式=$\dfrac{1}{2}f_+'\left(3\right)$

②原式=10×2^{10}

例 4 设 $f\left(x\right)$ 可导，且 $f\left(x\right)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f\left(a\right)}\right]^n$.

解：$y=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

2. 导数的物理意义：

导数的物理意义是指点运动的瞬时速率。设一质点沿 x 轴运动时，其位置 x 是时间 t 的函数， $x=f(t)$，若 Δt 无限地接近于 0 时，平均速度 $\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ 会无限地接近于质点 t_0 时的瞬时速度，即：质点在 t_0 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$。

3. 导数的几何意义：

函数 $f(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 $(\mathrm{x}_0,f(\mathrm{x}_0))$ 处切线的斜率。

切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；法线方程为：$y-f(x_0)=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

【评注】导数的定义要求深刻理解，会用导数定义求解一点的导数值或者分析函数在一点的可导性。

例 5 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+a(x)$，其中 $a(x)$（当 $x\to 0$ 时）是 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

解：$2x-y-12=0$

2.2 一元函数微分

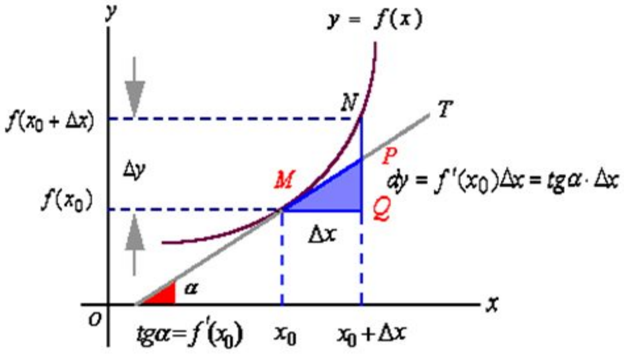
1. 微分的定义：

设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，如果增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为 $A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$，则称 $f(\mathrm{x})$ 在点 $x=x_0$ 处可微，且 $A\Delta x$ 为 $f(\mathrm{x})$ 在点 $x=x_0$ 的微分，记为 $dy=A\Delta x=Adx$。

2. 微分的几何意义：

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 $x=x_0$ 处对应于自变量增量 Δx 的纵坐标

的增量，而微分 $dy\big|_{x=x_0}$ 是曲线 $y=f(\mathrm{x})$ 在点 M 处的切线相对于自变量增量 Δx 的纵坐标增量。



【评注】：掌握函数的微分计算公式，对一元函数而言，可微与可导是等价的。

2.3 可导性、可微性、连续性之间的关系

1. 函数可导性与连续性的关系：

设函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在 x 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$，由具有极限的函数与无穷小的关系知道，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，$\alpha$ 为当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小，上式两边同时乘以 Δx，得 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ 由此可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，说明 $y=f(\mathrm{x})$ 在该点处连续。

因此，如果函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则 $f(\mathrm{x})$ 在同一点处必连续，反之不一定成立。

2. 函数的可微与连续性的关系：

函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在 x 处可微 $\Rightarrow$ 函数 $y=f(\mathrm{x})$ 在 x 处连续，反推不成立。

3. 函数可导性与奇偶性与周期性的关系：

设 $y=f(\mathrm{x})$ 在 I 上可导，若 $y=f(\mathrm{x})$ 在 I 上为奇函数，则 $f'(x)$ 在 I 上为偶函数；

设 $y=f(\mathrm{x})$ 在 I 上可导，若 $y=f(\mathrm{x})$ 在 I 上为偶函数，则 $f'(x)$ 在 I 上为奇函数；

设 $y=f(\mathrm{x})$ 可导且周期为 T，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期。

4. 函数的微分与函数的增量之间的关系：

设 $f(\mathrm{x})$ 在 x_0 处可导（可微），则 $\Delta y=dy+o(\Delta x)$ 或者 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$。

【评注】：对一元函数而言，可导和可微是等价的，连续是可导的必要条件。可导性与奇偶性的关系，后面还有求积分与奇偶性的关系，可以总结记忆。

2.4 特殊函数导数的性质及常用结论

1. 带有绝对值的函数导数情形讨论：

（1）设 $f(x_0)=0, f'(x_0)$ 存在，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件为 $f'(x_0)=0$ 。

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $g(x)|x-x_0|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 。

2. 常见导数不存在导数情形：

（1） $f(x)=|x-x_0|$ 在 $x=x_0$ 处导数不存在，但 $|x-x_0|(x-x_0)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可导。

（2） $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处当 $\alpha>1$ 时导数存在； $\alpha\le 1$ 时导数不存在。

3. 常见结论：

（1） $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

一般地，1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f[g(x)]-f(x_0)}{g(x)-x_0}=f'(x_0)$

2) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-x_0}{x-x_0}$$

3) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[h(x)]}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}$$

这里 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=x_0$

（2） 若 $f(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A \Leftrightarrow f(x_0)=0, f'(x_0)=A$

若 $f'(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=A \Leftrightarrow f'(x_0)=0, f''(x_0)=A$

若 $f''(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}=A \Leftrightarrow f''(x_0)=0, f'''(x_0)=A$

若 $f(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=A(k>1) \Rightarrow f(x_0)=0, f'(x_0)=0$

若 $f(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=A(0<k<1)\Rightarrow f(x_0)=0,f'(x_0)$ 不存在

2.5 一元函数的求导方法

1. 按定义求导：

求 $y=f(\mathrm{x})$ 在 $x=x_0$ 的导数，就是求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的值。

例 1 ①设 $f\left(x\right)=\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\ldots\left(e^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，则 $f'\left(0\right)$=_____

解：$f'\left(0\right)=\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)!$

②设 $f\left(x\right)=\left(\sin^2 x-\sin^2 a\right)g\left(x\right)$，其中 $g\left(x\right)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'\left(a\right)$

解：$f'\left(a\right)=\cos a\bullet 2\sin a\bullet \mathrm{g}\left(a\right)$

例 2 设 $f\left(x\right)=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1\right]\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\ldots\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]$.求 $f'\left(1\right)$.

解：$-\dfrac{99!}{2}\pi$

2. 按基本求导法则与导数表求导：

（1）常用导数（微分）运算法则：

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad \mathrm{d}(u\pm v)=du\pm dv$$
$$(cu)'=cu' \qquad \mathrm{d}(cu)=cdu$$
$$(uv)'=u'v+uv' \qquad \mathrm{d}(uv)=vdu+udv$$
$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad \mathrm{d}(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}(\mathrm{v}\neq 0)$$

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(\mathrm{x})$，则有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$，相对应的，$dy=f'(u)du$

（2）基本初等函数的导数（微分）公式：

$(c)'=0$　　$\mathrm{d}(c)=0$

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$　　$\mathrm{d}(x^a)=ax^{a-1}\mathrm{d}x$

$(e^x)'=e^x$　　$\mathrm{d}(e^x)=e^x\mathrm{d}x$

$(a^x)'=a^x\ln a$　　$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

$(\log a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　$\mathrm{d}(\log a^x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

$(\sin x)'=\cos x$　　$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$

$(\cos x)'=-\sin x$　　$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$　　$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$　　$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$　　$\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

3. 变限积分求导公式：

设 $f(\mathrm{x})$ 为连续函数，$\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 均可导，则有

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)'=f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\text{。}$$

4. n 阶导数运算法则与常见初等函数 n 阶导数公式：

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

$$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+(uv)^{(n)}$$

$$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$$

$$\left(\frac{1}{a-bx}\right)^{(n)}=\frac{b^nn!}{(a-bx)^{n+1}};$$

$$(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin(ax+\frac{\pi}{2}\times n)$$

$$(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos(ax+\frac{\pi}{2}\times n)$$

$$(\ln(1+x))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$(\frac{1}{x+1})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

例 3 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$，则 $y^n\left(0\right)=$______

解：$y_0^n=\frac{1}{3}\left(-1\right)^n n!\left(\frac{2}{3}\right)^n$

例 4 设 $y=x^2\ln\left(1+x\right)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}\left(0\right)\left(n\geq 3\right)$.

解：$f^{(n)}\left(0\right)=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\bullet n!}{n-2}$

5. 参数方程求导

参数方程求导：设 $f(\mathrm{x})$ 由参数式 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定，并设 x、y 均可导，则：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

例 5 设 $\begin{cases}x=\cos\left(t^2\right)\\y=t\cos\left(t^2\right)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du\end{cases}$ 求：$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 处的值.

解：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

例 6 求心形线 $r=2\left(1-\cos\theta\right)$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点出的切线方程.

解：$x+y-2=0$

6. 复合函数求导：

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则有 $y=f[\varphi(\mathrm{x})]$，$y'=f'(u)\cdot\varphi'(u)=f'[\varphi(\mathrm{x})]\varphi'(\mathrm{x})$。

例 7 求下列函数的导数或微分

① $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

②设 f 是可导函数，求 $y=f\left(e^x\right)e^{f(x)}$ 的导数.

③设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$，$f'(x)=x^2$，求 dy.

解：① $y'=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

② $y'=f'\left(e^x\right)e^xe^{f(x)}+f\left(e^x\right)e^{f(x)}f'(x)$

③ $dy=\dfrac{4\left(2x-1\right)^2}{\left(2x+1\right)^4}dx$

7. 反函数求导：

如果 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f(\mathrm{y})\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间

$\mathrm{I_x}=\{x|x=f(y),y\in\mathrm{I}_y\}$ 内也可导，且 $[f^{-1}(x)]'=\dfrac{1}{f'(y)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$。

例 8 将常微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+\left(y+\sin x\right)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 的方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=\sin x$.

【评注】：各种求导法则和计算公式是微积分的基本运算，属考研的基本内容。

8. 隐函数求导法则

隐函数求导：设函数 $f(\mathrm{x})$ 由方程 $\mathrm{F(x,y)}=0$ 确定，视 $\mathrm{F(x,y)}$ 中的 y 为 x 的函数 $f(\mathrm{x})$，将 $\mathrm{F(x,y)}=0$ 两边对 x 求导，得到含有 $\dfrac{dy}{dx}$ 的一个式子，从中解出 $\dfrac{dy}{dx}$ 即可，将已获得的 $\dfrac{dy}{dx}$ 再对 x 求导，并视其中的 y 为 x 的函数 $f(\mathrm{x})$，便得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

例 9 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\left(ye^{xy}+\sin x\right)}{xe^{xy}+2y}$

例 10 设 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-y\right)^3}$

9. 相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系。这两个相互依赖的变化率称为相关变化率。相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率。

第三章　微分中值定理及导数的应用

3.1 微分中值定理（上）

1. 费马定理

如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且取得极值，则 $f'(x_0)=0$。

【评注】：可导的极值点必然是驻点。

2. 罗尔定理

（1）罗尔定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且区间端点处的函数值 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

（2）罗尔定理的证明：

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值与最小值，分别用 M 与 m 表示，现分两种情况来讨论：

（i）若 $M=m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必为常数，从而结论显然成立。

（ii）若 $M>m$，则因 $f(a)=f(b)$，使得最大值 M 与最小值 m 至少有一个在 (a,b) 内某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 $f(x)$ 的极值点。由 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，$f(x)$ 在点 ξ 处可导，故由费马定理推知 $f'(\xi)=0$。

例 1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)=0$，$g(x)\neq 0$.求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=b$，$f(b)=a$，a 与 b 同号，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx$.证明：至少在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.证：

（Ⅰ）存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$.

（Ⅱ）对任意实数 λ 存在 $\xi\in(0,\eta)$，使 $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$.

3.2 微分中值定理（中）

1. 拉格朗日中值定理

（1）拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

（2）拉格朗日中值定理证明：

作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。显然，$F(a)=F(b)\quad(=0)$，且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的另两个条件。故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立。

从上面的证明可知道罗尔定理是拉格朗日定理当 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情形。

例 1 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：（Ⅰ）存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(a)=1-a$；

（Ⅱ）存在两个不同的点 η，$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$.证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

例 3 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（Ⅰ）对于 $(-1,1)$ 内的任一非零 x，存在的唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立.

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2. 柯西中值定理

（1）柯西中值定理：如果 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

（2）柯西中值定理证明：

因 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，所以根据拉格朗日中值定理可知存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)$，又因 $g'(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$，故 $g'(\eta)\neq 0$，因此 $g(b)-g(a)\neq 0$。

作辅助函数: $H(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，故 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，而 $H(a)=H(b)=0$，因此作辅助函数满足罗尔定理的条件

所以由罗尔定理可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$H'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0\text{，因 } g'(\xi)\neq 0$$

故上式可化为： $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\qquad \xi\in(a,b)$$

定理证毕。

【评注】：罗尔定理和拉格朗日中值定理的证明思路需了解，柯西中值定理的证明考研中未考察过。

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(\mathrm{a,b})$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0$.试证：$\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

例 6 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(\mathrm{a,b})$ 内可导，且 $f'(x)\geq 0$，若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

（1）在 (a,b) 内，$f(x)>0$；

（2）在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在(a,b)内存在于（2）中ξ相异的点η，使$f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$.

3.3 微分中值定理（下）

1. 泰勒中值定理

1. **带有皮亚诺型余项的n阶泰勒公式：**

若函数$f(x)$在x_0存在n阶导数，则有：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

这里$o((x-x_0)^n)$为皮亚诺余项。上式称为函数$f(x)$按$x-x_0$的幂展开的带皮亚诺型余项的n阶泰勒公式。特别的，当$x_0=0$时，上式变成

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

称此式为(带有皮亚诺型余项的)麦克劳林公式。

【评注】：一般已知函数在零点光滑的话，常用麦克劳林公式。熟记$e^x,\sin x,\cos x$等常见函数的麦克劳林展式。

2. **带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式：**

若函数$f(x)$在x_0某邻域内为存在直至$n+1$阶的连续导数，则有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\ ,$$

这里$R_n(x)$为拉格朗日余项，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中$\xi$在$x$与$x_0$之间。上式称为函数$f(x)$按$x-x_0$的幂展开的带拉格朗日型余项的$n$阶泰勒公式。特别的，当$x_0=0$时，上式变成

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

称此式为(带有拉格朗日型余项的)麦克劳林公式。

【评注】：拉格朗日型余项的公式考研中不常用，了解即可。

例 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|\ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$

（1）证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$.

（2）证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

3.4 函数的单调性

1. 单调性判别方法：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

（1）若在 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减。

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不增。

（3）若在 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$ 且在任意子区间 $f'(x)\ne 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加。

（4）若在 (a,b) 内 $f'(x)\le 0$ 且在任意子区间 $f'(x)\ne 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

【评注】：注意单调性是需在一个区间内考察的，在一点的导数值大于零或者小于零，不能确定其单调性。

2. 函数单调区间的一般求法：

（1）写出函数 $f(x)$ 的定义域。

（2）求出函数 $f(x)$ 的驻点和不可导点，即 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点。

（3）利用上述的点由小到大将 $f(x)$ 的定义域划分成若干个互不相交的子区间。

（4）讨论 $f'(x)$ 在每个子区间的符号，判断函数的单调性。

【评注】：考研数学要求掌握求解函数单调区间的一般方法，真题中曾经出过解答题。

例 1 设$e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

例 2 设$f'(x)<0$；$f(0)=0$，证对任何$x_1>0$，$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

例 3 证明：当时$0<a<b<\pi$，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

例 4 设$x\in(0,1)$，证明①$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；②$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

3.5 函数的极值

1. 函数极值定义：

设函数$f(x)$在点$x=x_0$的某邻域内有定义，如果$\exists\delta>0$，对$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$有$f(x)>f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0))$，则称$x=x_0$ 是$f(x)$的极小（大）值点，$f(x_0)$称为$f(x)$的极小（大）值，等号仅在$x=x_0$时成立。极大值点、极小值点统称为极值点，极大值、极小值统称为极值。

2. 函数极值存在的条件：

（1）必要条件：设$f(x)$在x_0处可导并且取得极值，那么$f'(x_0)=0$。

（2）极值第一充分判定定理：设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域内可导：

(i) 若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取极大值。

(ii) 若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取极小值。

(iii) 若$x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处没有极值。

（3）极值第二充分判定定理：设函数$f(x)$在x_0处二阶可导，且$f'(x_0)$=0，则

(i) 若$f''(x)<0$时，$f(x)$在x_0处取极大值。

(ii) 若$f''(x)>0$时，$f(x)$在x_0处取极小值。

(iii) 若$f''(x)=0$时，$f(x)$在x_0处可能取得极小值，也可能取得极大值，也可能没有极值。此时可用函数$x^3,-x^3,x^4$在$x=0$处举例便可说明。

【评注】：极值是考研中的重点考察内容，给定一点要求会用充分条件判断是否为极值点。

3. 函数极值的一般求法：

（1）求出函数 $f(x)$ 的驻点和不可导点；

（2）用求出的驻点和不可导点由小到大将函数的定义域分为若干互不相交的子区间；

（3）讨论 $f'(x)$ 在每个子区间内的符号，由极值的充分判断法或极值的定义判断即可。

【评注】：求极值问题是考研中的常考题型，要求熟悉求解极值的一般步骤。

4. 极值与最值：

求在 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大（小）值分为两部走：

（1）求 $f'(x)=0$ 及 $f'(x)$ 不存在点，以及区间端点处的值 $f(\mathrm{a}), f(\mathrm{b})$.

（2）计算上述各点处的函数值，经比较，最小即为 m，最大即为 M。

例 1 求 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

解：单调增区间为 $(-1,0),(1,+\infty)$

单调减区间为 $(-\infty,-1),(0,1)$

极小值为 $f(\pm 1)=0$

极大值为 $f(0)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

例 2 证明不等式 $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

3.6 函数的凹凸性

1. 凹凸性的定义：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果对 $\forall x,x_0\in(a,b)且x\neq x_0$ 恒有 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>(<)f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的是凸（凹）的。

2. 凹凸性判定的充要条件：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)\geq 0$，且在 (a,b) 的任意子区间内 $f''(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的。

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)\leq 0$，且在 (a,b) 的任意子区间内 $f''(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的。

3.7 函数的拐点

1. 函数拐点的定义：

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内连续，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左右凹凸性相反，则该点为 $y=f(x)$ 的拐点。

2. 函数拐点存在的条件：

（1）拐点的必要条件：设 $f(x)$ 在 x_0 处取得拐点，那么 $f''(x)=0$ 或不存在。

（2）拐点的充分判定定理：

（i）设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上连续，且在 x_0 的该去心邻域内二阶可导，且 $f''(x)$ 在点 x_0 的两侧异号，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得拐点。

（ii）设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上二阶可导，$f''(x_0)=0$，又 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得拐点。

3. 函数拐点的一般求法：

（1）求函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$。

（2）令 $f''(x)=0$，解出方程在区间内的实根，求出在区间内 $f''(x)$ 不存在的点。

（3）对于（2）中的点，检查 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 左、右两侧的符号，当符号相反时，该点是拐点，反之不是。

例 1 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为_____.

解：$(-\infty,1)$（或 $(-\infty,1]$）

3.8 函数的渐近线

1. 水平渐近线的定义：

对于曲线 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b,(x\to+\infty,x\to-\infty)$，则 $y=b$ 为一条水平渐近线。

2. 铅直渐近线的定义：

对于曲线 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty,(x\to c^-,x\to c^+)$，则 $x=c$ 为一条铅直渐近线。

3. 斜渐近线的定义：

对于曲线 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 为一条斜渐近线。

例 1 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

解：$y=x+\frac{3}{2}$

例 2 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+e^{x}\right)$ 的渐近线的条数为______.

A. 0　　B.1　　C. 2　　D.3

【评注】：理解函数渐进线的概念，会求解函数的渐进线方程，另外注意一点，在同一方向上，函数的水平渐进线和斜渐近线是不可能同时存在的。

3.9 曲率与曲率半径

1. 曲率的定义：

曲率是描述曲线弯曲程度的量。设 C 是光滑曲线 $y=f(x)$，选定一点 M_0 为度量弧 s 的基点，曲线上的点 M 对应于 s，在点 M 处的倾角为 α，则用 $\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 表示单位弧段上切线转过的角度，即该弧段的平均曲率；用 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$ 表示弧段上点 M 处的曲率。

2. 曲率半径的定义：

定义 $\rho=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}\right|=\frac{1}{K}$ 为曲线在点 M 处的曲率半径。

3. 曲率的计算公式：

（1）当 $x=x(t), y=\mathrm{y}(t)$ 时，弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$，曲率为：

$$K=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}。$$

（2）当 $y=y(x)$，$y(x)$ 二阶可导时，弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$，曲率为：

$$K=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{y''(x)}{\left\{1+y'^2(x)\right\}^{3/2}}。$$

【评注】：数学一、二考试范围，理解曲率的概念并会计算曲率。

第四章　一元函数积分

4.1 原函数的定义与性质

1. 原函数定义：

如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即 $F'(x)=f(x)$ 在区间 I 上成立，那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

2. 原函数性质：

（1）如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数。如果 $f(x)$ 在区间 I 内有原函数，$f(x)$ 在区间 I 内却不一定连续。

（2）$F(x)$ 是 $f(x)$ 在某个区间上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。

（3）$F(x)$ 和 $G(x)$ 均是 $f(x)$ 在同一区间上的原函数，则 $F(x)$ 和 $G(x)$ 仅相差一个常数。

例 1 设 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

解答：$\int xf'(x)dx=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$

4.2 不定积分的定义与性质

1. 不定积分的定义：

在区间 I 上，$f(x)$ 的原函数的全体为 $f(x)$ 的不定积分，即如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $\int f(x)dx=F(x)+C$。

2. 不定积分性质：

（1）设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则 $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$。

（2）设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

4.3 不定积分的计算与技巧

1. 利用基本积分表计算不定积分：

$\int 0dx=c$　　　　$\int \sec x\cdot\tan xdx=\sec x+c$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$　　　　$\int\csc x\cdot\cot xdx=-\csc x+c$

$$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c \quad (\mu\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

$$\int e^x dx=e^x+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+c$$

$$\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+c$$

$$\int \cos x dx=\sin x+c$$

$$\int \cot x dx=\ln|\sin x|+c$$

$$\int \sec^2 x dx=\tan x+c$$

$$\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\int \csc^2 x dx=-\cot x+c$$

$$\int \csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

例 1 ① $\int \frac{1-x}{x^2-2x+1}dx$

② $\int \tan^2 x dx$

解答：$\int \frac{1-x}{x^2-2x+1}dx=-\ln|x-1|+c$

$\int \tan^2 x dx=\tan x-x+C$

2. 利用第一类换元法计算不定积分：

设 $f(x)$ 具有原函数 $F(u)$，即 $F'(u)=f(u)$，$\int f(u)du=F(u)+C$，如果U 是中间变量，$u=\varphi(x)$，且设 $\varphi(x)$ 可微，那么根据复合函数微分法，有

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$$

从而 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$。

由此可见，虽然 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 是一个整体的记号，但如用导数记号 $\dfrac{dy}{dx}$ 中的 dx 及 dy 可看作微分，被积表达式中的 dx 也可当作变量 x 的微分来对待，从而微分等式 $\varphi'(x)dx = du$ 可以方便地应用到被积表达式中。

几大类常见的凑微分形式：

（1）$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)\ (a \neq 0)$

（2）$\int f(\sin x)\cos xdx = \int f(\sin x)d\sin x$，$\int f(\cos x)\sin xdx = -\int f(\cos x)d\cos x$，

$\int f(\tan x)\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\tan x)d\tan x$，$\int f(\cot x)\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\int f(\cot x)d\cot x$

（3）$\int f(\ln x)\dfrac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d\ln x$，$\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$

（4）$\int f(x^n)x^{n-1}dx = \dfrac{1}{n}\int f(x^n)dx^n\ (n \neq 0)$，$\int f(\dfrac{1}{x})\dfrac{dx}{x^2} = -\int f(\dfrac{1}{x})d(\dfrac{1}{x})$，

$\int f(\sqrt{x})\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

（5）$\int f(\arcsin x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(\arcsin x)d\arcsin x$

（6）$\int f(\arctan x)\dfrac{dx}{1+x^2} = \int f(\arctan x)d\arctan x$；

例 2 $\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解：$\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sin\sqrt{x} + C$

例 3 $\int \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

解: $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$

3. 利用第二类换元法计算不定积分:

设 $x = \psi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式 $\int f(x)dx = [\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]_{t=\psi^{-1}(x)}$。

第二类换元法主要是针对多种形式的无理根式，常见的变换形式主要有以下几种：

（1）$\sqrt{a^2 - x^2}$：$x = a\sin t$；$x = a\cos t$

（2）$\sqrt{x^2 + a^2}$：$x = a\tan t$；$x = a\cot t$；$x = asht$

（3）$\sqrt{x^2 - a^2}$：$x = a\sec t$；$x = a\csc t$；$x = acht$

（4）$\sqrt[n]{ax+b}$:$\sqrt[n]{ax+b} = t$

（5）$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$:$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

（6）当被积函数含有 $x \cdot \sqrt[m]{ax^2+bx+c}$，有时倒代换 $x = \frac{1}{t}$ 也奏效。

例 4（1）$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

（2）$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

解答:（1）$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$

（2）$\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C$

4. 利用分部积分法计算不定积分:

设 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x), v'(x)$，则有 $(uv)' = u'v + uv'$,故

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx, \quad \int udv = uv - \int vdu$$

【评注】分部积分法主要是解决被积函数是两类或两类以上不同函数乘积的不定积分，在使用分部积分法时，要恰当地选择 u 和 dv，即求 $\int udv$ 比较困难，而求 $\int vdu$ 比较容易. 一般可依次选取 u 的顺序为：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数，一般

只要被积函数中含有对数函数或反三角函数时，常使用分部积分法.

例 5 求下列不定积分

（1）$\int x^2\cos 3x dx$

（2）$\int x^2\ln^2 x dx$

解：（1）$=\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$

（2）$=\left(\frac{1}{3}\ln^2 x-\frac{2}{9}\ln x+\frac{2}{27}\right)x^3+C$

5. 有理函数的不定积分的计算技巧：

（1）有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$：

先化为多项式和真分式 $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ 之和，再把 $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ 分解为若干个部分分式之和。

（2）三角函数有理式的积分：

（i）如果被积函数 $R(\sin x,\cos x)$ 是关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的一次分式时，可试用万能替换法；

利用万能公式：设 $t=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$，

$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

（ii）若 $R(\sin x,\cos x)$ 是关于 $\cos x$ 的奇函数，即 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，可设 $t=\sin x$；

（iii）如果 $R(\sin x,\cos x)$ 是关于 $\sin x$ 的奇函数，即 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，可作变换 $t=\cos x$；

（iv）如果 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，可设 $\tan x=t$；

（v）若被积函数是 $\sin^n x\cos^m x$，且 n 和 m 中至少有一个数为奇数（不妨设 $m=2k+1$，$k\in Z^+,n\in Z^+$），可设 $t=\sin x$；

（vi）若被积函数是 $\sin^n x\cos^m x$，且 n 和 m 都是偶数，可由三角公式 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$，$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，代入被积函数化简，一种情况是含有 $\sin 2x$ 或 $\cos 2x$ 的奇数次幂，则用方法（5）求之；另一种情况是仍含有 $\sin 2x$ 和 $\cos 2x$ 的偶数次幂，则继续使用上述方法化简，转化为以

$\sin 4x$ 和 $\cos 4x$ 为变数的幂函数相乘，以此类推.

（vii）如果被积函数是 $\sin mx \sin nx$，或 $\sin mx \cos nx$，或 $\cos mx \cos n$，则利用积化和差公式，然后再求不定积分.

例 6 有理函数积分

（1）求下列不定积分 $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$

解：$\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

(2) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}dx$

4.4 定积分

1. 定积分的定义：

设函数 $f(x)$在$[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，各个小区间的长度依次为$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\varepsilon_i(x_{i-1}\le\varepsilon_i\le x_i)$，作函数值 $f(\varepsilon_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\varepsilon_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 并作和 $S=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i$。记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点 ε_i 怎样取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，这时我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分(简称积分)，记作 $\int_a^b f(x)dx$。即

$$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i\text{。}$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$叫做积分区间。

2. 定积分的几何意义：

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx$ 表示介于曲线 $y=f(x)$、x 轴、直线 $x=a$ 及 $x=b$ 各部分面积的代数和。

3. 可积的必要条件：

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

4. 可积的充分条件：

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；或函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（3）分段连续函数是可积的.

（4）若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调有界函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 也就是说，单调有界函数，即使有无穷多个间断点，但这些不连续的点若存在一个极限点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（5）初等函数在其定义区间内的任一子区间上都是可积的.

5. 定积分性质及定理：

（1）函数和（差）的定积分等于它们的定积分的和（差），即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx\text{。}$$

（2）被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k 是常数)。

（3）如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两个区间上定积分之和，即设 $a<c<b$,则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 。

（4）如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a$ 。

（5）如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$ $(a<b)$ 。

（6）如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\le g(x)$,则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ $(a<b)$ 。

特别的 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$ $(a<b)$

（7）设 M 与 m 分别是函数 $f(x)$在$[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\ (a<b)\text{。}$$

（8）（定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ (a \le \xi \le b)$。

6. 定积分的计算与技巧

（1）牛顿-莱布尼茨公式：

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

此公式被称为牛顿-莱布尼兹公式，它进一步揭示了定积分与原函数之间的联系，它给定积分提供了一个有效而简便的计算方法。

此外牛顿-莱布尼茨公式有如下推广：

（i）设函数 $f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$、在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

（ii）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，又

$$F(\mathrm{a}+0) = \lim_{x\to a+0} F(x)，F(b-0) = \lim_{x\to b-0} F(x)$$

都存在，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+0}^{\mathrm{b}\text{-}0} = F(b-0) - F(a+0)$

（iii）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 中除去 $\mathrm{c} \in [a,b]$ 连续，$F(c-0)$、$F(c+0)$ 存在，且 $F'(x) = f(\mathrm{x})$，$x \in [a,b]$，$x \ne c$，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{c-0} + F(x)\Big|_{c+0}^b = F(b) - F(c+0) + F(c-0) - F(a)$$

（2）换元积分法：

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；函数 $g(t)$ 在区间 $[m,n]$ 上是单值的且有连续导数；当 t 在区间 $[m,n]$ 上变化时，$x = g(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $g(m) = \mathrm{a}, g(n) = b$；则有定积分的换元公式：$\int_a^b f(x)dx = \int_m^n f[\mathrm{g(t)}]\mathrm{g'(t)}dt$

【评注】：在使用定积分的换元法时，当积分变量变换时，积分的上下限也要作相应的变换，即定积分中换元必换限。

（3） 分部积分法

依据不定积分的分部积分，可以推算出

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx，\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu，$$

例 1 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$，由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解：（1）略（2）$\frac{\pi^2}{4}$

例 2 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$

解：$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$

例 3 $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$

解：$\frac{\sqrt{e}}{2}$

4.5 变限积分的定义与性质

1. 变限积分定义：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积， x 是 $[a,b]$ 上的任意一点，则称 $f(x) = \int_a^x f(t)dt$ 为积分上限函数（或变上限积分），而称 $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ 为积分下限函数.

2. 变限积分性质：

（1）（原函数存在定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，并且它的导数是 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

$(a \le x \le b)$

（2）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则变限函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

（4）若 $f(x)$ 是连续函数，$u(x),v(x)$ 是可导函数，则

（i）$\frac{d}{dx}\int_{a}^{u(x)} f(t)dt = f[u(x)]\cdot u'(x)$；

（ii）$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{b} f(t)dt = -f[v(x)]\cdot v'(x)$；

（iii）$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f[u(x)]\cdot u'(x) - f[v(x)]\cdot v'(x)$.

例 1 设 $g(x)=\int_{0}^{x} f(u)du$，其中 $f(x)=\begin{cases}(x^2+1)/2, 若 0\le x<1,\\(x-1)/3, 若 1\le x\le 2,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（）

（A）无界（B）递减（C）不连续（D）连续

解：D

例 2 设 $f(x)$ 奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\int_{0}^{x} f(t)dt$（）.

（A）连续的奇函数（B）连续的偶函数

（C）在 $x=0$ 间断的奇函数（D）在 $x=0$ 间断的偶函数

解：B

例 3 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt}{x\int_{0}^{x}f(x-t)dt}$.

解：$\frac{1}{2}$

4.6 反常积分（广义积分）

1. 反常积分的定义：

（1）无穷限的广义积分：

(i)积分区间 $[a,+\infty)$ 情形

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$.如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$，即 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$，这时称广义积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；如果上述极限不存在，就称为广义积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

(ii)积分区间 $(-\infty,b]$ 情形

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续,取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $\left(-\infty,b\right]$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$，即 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$，这时称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛；如果上述极限不存在，就称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散。

(iii)积分区间 $(-\infty,+\infty)$ 情形

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，如果广义积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称上述两广义积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间（$-\infty,+\infty$）上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$

这时称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；否则就称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

（2）无界函数的广义积分（也称瑕积分）：

(i)瑕点的定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，而 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，称 b 为 $f(x)$ 的瑕点。

(ii)瑕积分的定义：

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，$x=b$ 为瑕点，且对任意的 $\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $\left[a,b-\varepsilon\right]$ 上可积，即极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 存在，则称该极限值为无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分或叫瑕积分，记作：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \text{ 或 } \int_a^b f(x)dx=\lim_{B\to b^-}\int_a^B f(x)dx,$$

此时也称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是收敛的；若上式的极限不存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

类似地可以定义瑕点为 $x=a$ 时的广义积分 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{A\to a^+}\int_A^b f(x)dx$，其中 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义，a 为瑕点，且在任何 $\left[A,b\right]\subset\left(a,b\right]$ 上可积。

2. 反常积分（广义积分）的性质及定理：

（1）无穷限的广义积分：

(i)若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} kf(x)dx=k\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$k$ 为常数.

(ii)若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]dx$ 也收敛，且有

$$\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx\pm\int_a^{+\infty}g(x)dx.$$

(iii)设 $u'(x),v'(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上连续，如果下面等式中有两项存在，则第三项也存在，且有

$$\int_a^{+\infty}udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}vdu.$$

(iv)若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,A]$ 上可积，且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，且有 $\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$.

（2）无界函数的广义积分：

(i)若 $x=a$ 为瑕点且积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b kf(x)dx$ 也收敛，且有

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$，其中 k 为常数。

(ii)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的瑕点同为 $x=a$，且瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx$ 也收敛，且有 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

(iii)定积分的分部积分法与换元积分法对瑕积分也成立。

(iv)设 $x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点，$f(x)$ 在 $(a,b]$ 内的任一闭区间上可积，若积分 $\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛，且有 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$。

3. 几个重要的反常积分（广义积分）：

（1）若 $a>1$, 则

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1},\text{收敛；} & p>1\\ \text{发散;}\, p\le 1\end{cases}$$

（2）若 $a>1$, 则

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases}\dfrac{\ln^{1-p}a}{p-1},\text{收敛；} & p>1\\ \text{发散;}\, p\le 1\end{cases}$$

（3）若 $c\in[a,b]$, 则

$$\int_a^b\frac{1}{(x-c)^k}dx,\ 0<k<1\text{时收敛；当}\ k\ge 1\ \text{发散。}$$

（4）若 $k \geq 0$, 则

$$\int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} 收敛；\ \lambda > 0 \\ 发散; \lambda \leq 0 \end{cases}$$

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$； $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

4. 反常积分的计算与技巧：

反常积分是变限积分的极限，因此由定积分的运算法则与极限运算法则就可得到反常积分的运算法则。下面以反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为例，列出相应的运算法则，对于各种类型的反常积分也是有相应的计算法则。

（1）设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续，$F(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 中连续，且 $F'(x)=f(x)\quad x\in[a,+\infty]$，

若 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) \triangleq F(+\infty)$ 存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

若 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ 不存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

（2）设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上有连续的导数，若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)$ 存在，且 $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

（3）设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续，$\varphi(t)$ 在 $[a,\beta]$ 中有连续的导数且单调，$\varphi(\alpha)=a$，$\lim\limits_{x\to\beta-0} \varphi(\mathrm{t}) = +\infty$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

这里的 β 可以是有限的，也可以是 ∞。

例 1 计算 $\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^k}$（$k$ 为常数）.

解：因 k 值不同，分 3 种情况讨论：

若 $k>1$，原式=$\dfrac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1}$；

若 $k=1$，原式=$+\infty$，即积分发散；

若 $k<1$，原式$=+\infty$，即积分发散.

例 2 下列反常积分发散的是（）

（A）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$ （B）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

（C）$\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ （D）$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

解：A

4.7 积分的重要公式与结论

1. 奇偶函数的积分性质：

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$；

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$；

2. 周期函数的积分性质：

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，a 为常数，则有

$$\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx,\quad \int_{a}^{a+nT}f(x)dx=\int_{0}^{nT}f(x)dx=n\int_{0}^{T}f(x)dx,$$

其中 n 为正整数.

特别，$\int_{a}^{a+\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx$，$\int_{a}^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx.$

3. 对称区间上函数的定积分：

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$，常用于计算形如 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+e^{\pm x}}dx$ 或 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{1+e^{\pm x}}dx$ 的定积分；

4. 几个常用的定积分变换公式：

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，则

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx;\qquad \int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx;$$

$$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx;\qquad \int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx.$$

注释：常用于计算形如 $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 的定积分；

5. 定区间上函数定积分变换：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

6. n 阶正余弦函数的定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3} & n\text{为奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{n为偶数} \end{cases}$$

4.8 定积分的元素法

1. 定积分的元素法的一般步骤：

（1）根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$

（2）设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x,x+dx]$，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值.如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU，即 $dU = f(x)dx$；

（3）以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作定积分，得 $U = \int_a^b f(x)dx$，即为所求量 U 的积分表达式，这个方法通常叫做元素法。

【评注】：运用元素法的关键：所求函数区间分割与微元近似。

4.9 一元函数积分学的几何应用

1. 平面图形的面积

（1）直角坐标情形：

设平面图形由上下两条曲线 $y = f_{上}(x)$ 与 $y = f_{下}(x)$ 及左右两条直线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围成, 则面积元素为 $[f_{上}(x) - f_{下}(x)]dx$, 于是平面图形的面积为

$$S = \int_a^b [f_{上}(x) - f_{下}(x)]dx .$$

类似地, 由左右两条曲线 $x = \varphi_{左}(y)$ 与 $x = \varphi_{右}(y)$ 及上下两条直线 $y = d$ 与 $y = c$ 所围成设平面图形的面积为

$$S = \int_c^d [\varphi_{右}(y) - \varphi_{左}(y)]dy .$$

注释：较为复杂图形的面积计算，可将图形分割若干小图形，使其符合 X 型或 Y 型，然后求面积和。

（2）极坐标情形：

曲边扇形及曲边扇形的面积元素：由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的图形称为曲边扇形. 曲边扇形的面积元素为

$$dS=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta .$$

曲边扇形的面积为 $S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$.

由连续曲线 $r=r_1(\theta),r=r_2(\theta)(r_2(\theta)\le(r_1(\theta))$ 和射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ $(\alpha\ <\beta)$ 所围成图形的面积 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)\right]d\theta$

（3）曲线方程是参数方程形式的情况：

设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\alpha\le t\le\beta,\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且 $\varphi'(t)$ 不变号，$\varphi(t)\ge0$ 且连续，则由曲线 C 和直线 $x=a,x=b$, x 轴围成的平面图形的面积 $A=\int_a^b|y|dx=\int_\alpha^\beta|\psi(t)|\varphi'(t)dt$

2. 体积

（1）旋转体的体积：

（i）平面图形由曲线 $y=f(x)(f(x)\ge0)$ 与直线 $x=a$，$x=b(x<b)$，x 轴所围成：

绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$；

绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$。

（ii）由连续曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $y=c$，$y=d(c<d)$，y 轴所围成的平面图形

绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 $V_y=\pi\int_a^b\varphi^2(y)dy$；

绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 $V_x=2\pi\int_c^d y\varphi(y)dy$。

（2）已知平行截面面积的立体体积：

设在空间直角坐标系中，有一个立体夹在垂直于 x 轴的两个平行平面 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 之间，它被垂直 x 轴的平面截得的截面面积为 $A(x)$，且 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则立体的体积

$$V=\int_a^b A(x)dx.$$

3. 平面曲线的弧长

（1）曲线为参数形式的平面曲线的弧长公式：

设曲线 C 是由参数方程 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\le t\le\beta$ 给出的光滑曲线，即 $x(t),y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数，则曲线段弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

（2）曲线方程为直角坐标方程的弧长公式：

设曲 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是光滑曲线，则曲线段的弧长为 $S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

（3）曲线方程为极坐标方程的弧长公式：

设曲线段是由极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$ 给出的光滑曲线，则曲线段的弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta.$$

例 1 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $y=3$ 旋转而成的旋转体体积.

解：$V=64\pi$

例 2 计算曲线 $y=\ln\left(1-x^2\right)$ 上相应于 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解：$s=\ln 3-\frac{1}{2}$

例 3 求心形线 $r=a\left(1+\cos\theta\right)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

解：$s=8a$

例 4 求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱 $\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 的弧长.

解：$s=8$

4.10 一元函数积分学的物理应用

1. 变力沿直线所做的功

变力 $F(x)$ 沿直线运动从 a 到 b 所作的功 $w=\int_a^b F(x)dx$

2. 水压力

在液面深处 h 处，由液体重量产生的压强等于它的深度 h 与液体比重 γ 的乘积：$p=\gamma h$，

并且同一点的压强在各个方向上是相等的。

3. 引力

由物理学知道，质点分别为m_1，m_2相距为γ的两质点间的引力的大小为$F=G\dfrac{m_1m_2}{\gamma^2}$，其中 G 为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线方向。

4. 质心

（1）考虑质量分布均匀的光滑曲线$\overset{\frown}{AB}: y=f(x), a\le x\le b,$ 其线密度为常数 u，

（i）取弧长 s 为自变量，$0\le s\le l$，且$\overset{\frown}{AB}$的全长为l，此时$\overset{\frown}{AB}$的参数方程（以弧长 s 为参数）为

$$\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases} (0\le s\le l)$$

若质心设为$(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{\mathrm{x}}=\frac{\int_0^l x(\mathrm{s})ds}{l}, \bar{y}=\frac{\int_0^l y(\mathrm{s})ds}{l}$$

（ii）若$\overset{\frown}{AB}$的参数方程为

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \alpha\le t\le\beta,$$

其中$\phi(t)$、$\psi(t)$在$\alpha\le t\le\beta$上有连续的导数，则质心$(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{\mathrm{x}}=\frac{\int_\alpha^\beta \phi(t)\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt}, \bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt}$$

（2）考虑质量分布均匀的平面薄片，所占的平面图形是$D: a\le x\le b, \mathrm{g(x)}\le \mathrm{y}\le \mathrm{f(x)}$，其面密度不妨设为常数 u，则其质心$(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x}=\frac{\mu\int_a^b x[f(x)-\mathrm{g}(x)]dx}{\mu\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}，\bar{y}=\frac{\mu\int_a^b \frac{1}{2}[f^2(x)-\mathrm{g}^2(x)]dx}{\mu\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}$$

第五章 常微分方程

5.1 微分方程的基本概念

1.微分方程的定义

一般的，凡表示未知函数、未知函数的导数和自变量之间的关系的方程，叫做微分方程，当未知函数是一元函数时，则称为常微分方程。

2.微分方程的阶的定义

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

3.微分方程的解的定义

若把某函数及其导数代入微分方程能使该方程变为恒等式，则称满足微分方程的函数为微分方程的解，通常要求微分方程的解具有和该微分方程的阶数相同阶数的连续导数。

4.微分方程的通解和特解的定义：

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解，通解也可以称作一般解；确定了通解中的任意常数后，就可以得到微分方程的特解。

通常，微分方程的一般解里，含有一些任意常数，其个数与微分方程的阶数相同，因此用来确定任意常数以从一般解得出一个特解的附加条件的个数也与微分方程的阶数相同。

5.微分方程的初始条件

设微分方程中的未知函数为 $y=\varphi(x)$，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是 $y\big|_{x=x_0}=y_0$，其中 x_0,y_0 都是给定的值；如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是 $y\big|_{x=x_0}=y_0,y'\big|_{x=x_0}=y'_0$，其中 x_0,y_0 和 y'_0 都是给定的值。上述这种条件叫做初始条件。

求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的特解这样的一个问题，叫做一阶微分方程的初值问题，记作

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

5.2 一阶微分方程及解法

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$，其中的最基本的类型是变量可分离的方程、一阶线性方程和全微分方程。齐次方程通过变量代换可转化为变量可分离的方程，伯努利方程通过变量代换可化为一阶线性方程。除了齐次方程和伯努利方程之外，还有一些一阶方程能够通过简单的变量代换化为上述基本类型。

1.可分离变量微分方程的形式和解法

一般的，如果一个一阶微分方程能写成

$$y'=f(x,y)=f(x)g(y) \quad \text{或} \quad f(x)dx+g(y)dy=0$$

这样的原方程就称为可分离变量的微分方程。

其解法是：直接积分 $\int f(x)dx+\int g(y)dy=C$

例 1. 求解 $ydx+\left(x^2-4x\right)dy=0$

答案：$y^4=\dfrac{cx}{4-x}$

2.齐次方程的形式和解法

如果一阶微分方程可化为 $y'=f(\dfrac{y}{x})$ 的形式，那么就称该方程为齐次方程。

其解法是：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y'=xu'+u$，y 的微分方程就化成了 u 的微分方程 $xu'=f(\mathrm{u})-u$，

即：$u'=\dfrac{f(\mathrm{u})-u}{x}$ 这就化成了可分离变量的微分方程，再通过积分即可求出方程的通解。

例 2.求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y}$

【答案】$x=Cy+y\ln|y|$

3.一阶线性微分方程形式和解法

形如方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 或 $x'+p(y)x=q(y)$ 叫做一阶线性微分方程。如果 $q(x)\equiv 0$ 或 $q(y)\equiv 0$，则称该方程是齐次的；否则称之为非齐次的。

其解法是：方程两边同乘以积分因子 $u=e^{\int p(x)dx}$，则原方程改写成 $[e^{\int p(x)dx}y]'=q(x)e^{\int p(x)dx}$，

然后积分可得 $y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$

例 3. 求解下列微分方程

（1）$\cos x\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=1$

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$

【答案】$(1)\cos x(\tan x+C)\ (2)y^2(-\ln y+C)$

4.伯努利方程形式和解法

方程 $y'+p(x)y=q(x)y^n\ (\mathrm{n}\neq 0,1)$ 叫做伯努利方程。当 $\mathrm{n}=0或1$ 时，这是线性微分方程。当 $\mathrm{n}\neq 0,1$，这个方程不是线性的，但是可以通过变量的代换，便可以将其转化为线性的。

其解法是： 令 $z=y^{1-n}$，则原方程可化为 $\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$，属于一阶线性微分方程。

例 4 求解 $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$

答案：$y^4\left(ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}\right)=1$

5.全微分方程

（1）全微分方程的定义：

若微分形式的一阶方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的左端恰好是一个二元函数 $\mathrm{U}(x,y)$ 全微分，即 $d\,\mathrm{U}(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程。显然，这时该方程的通解为 $\mathrm{U}(x,y)=\mathrm{C}$ (C 是任意常数)。

（2）二元函数的全微分求积定理：

设开区域 G 是一单连通域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$，在 G 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{x}}$ 在 G 内恒成立。

（3）全微分方程的求解

（i）特殊路径积分法：

$M_0(x_0,y_0)$ 为区域 G 内适当选定的点，则

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$$

（ii）不定积分法：

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，对 x 积分得 $u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$

对 y 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]+C'(y)=Q(x,y)$，由此求出 $C'(y)$ 再积分求 $C(y)$。

（iii）凑微分法：

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=......=du$

例 5 判别下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的特解

(1)$\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$

(2)$\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$

解：（1）$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=C$　　（2）原方程不是全微分方程

5.3 可降阶的高阶微分方程的求解方法

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程的求解方法

其求解方法是：连续积分 n 次

2. $y''=f(x,y')$ 型的微分方程的求解方法

其求解方法是：令 $y'=u$，原方程化为 u 的一阶方程：$u'=f(x,u)$

解得 $p=\varphi(x,C_1)$，由此又得到一个微分方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$，对其积分，便得到原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C$.

3. $y''=f(y,y')$ 型的微分方程的求解方法

其求解方法是：令 $y'=u$，故 $y''=\frac{du}{dy}\cdot u$。原方程化为以 u 为未知函数，y 为自变量的一阶方程：$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

例 1 求解下列微分方程

(1)$\begin{cases}x^2y''-(y')^2=0,\\y(1)=0,y'(1)=1\end{cases}$ (2)$\begin{cases}yy''=2\left(y'^2-y'\right),\\y(0)=1,y'(0)=2\end{cases}$

解：（1）$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$　（2）$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

5.4 高阶线性微分方程

1. 二阶线性微分方程的定义

二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

其中 y'',y',y 都是一次的，否则称为二阶非线性方程，其中 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数。

当右端 $f(x)\equiv 0$，方程叫做齐次的；当右端 $f(x)$ 不恒等于 0，方程叫做非齐次的。

2. 函数的线性相关与线性独立的定义

设 $y_1(x),y_2(x)$ 是定义在区间 I 的两个函数，如果 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv C$（常数），那么称此两函数在区间 I 线性相关，否则，称此两函数线性独立或线性无关。

3. 线性微分方程的解的结构

（1）齐次线性方程解的结构

先讨论二次线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

定理：如果函数 $y_1(x),y_2(x)$ 均是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是该方程的解，其中 C_1,C_2 为任意常数。

定理：如果函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程的任意两个线性独立的特解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是该方程的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数。

推论：如果 $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

的 n 个线性无关的解，那么，此方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

其中 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 为任意常数。

（2）非齐次线性方程解的结构

二阶非齐次线性方程的形式为：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

定理：设 $y_1(x)$ 是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的任一特解，$Y(\mathrm{x})$ 是与该方程对应的齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解，那么 $y=y_1(x)+Y(x)$ 就是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解。

定理：设有非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$.如果 $\mathrm{y}_1(x),y_2(x)$ 分别是方

程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 与方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的解，那么 $y_1(x)+y_2(x)$ 就是原方程的解。

4. 常系数齐次线性方程

（1）二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性方程的一般形式为 $y''+py'+q(x)=0$，其中 p，q 为实常数，其特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$。

依据判别式的符号，其通解有三种形式：

(i)当 $\Delta=p^2-4q>0$，特征方程有两个相异的实根 λ_1,λ_2，通解的形式为

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

(ii)当 $\Delta=p^2-4q=0$，特征方程有重根，即 $\lambda_1=\lambda_2$，通解的形式为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$$

(iii)当 $\Delta=p^2-4q<0$，特征方程有共轭复根重根 $\alpha\pm i\beta$，通解的形式为

$$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

（2）n 阶常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数齐次线性方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

其中 $p_i(\mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{n})$ 为常数，相应的特征方程为 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+...+p_n=0$。特征根与通解的关系同二阶方程的情形类似，具体结论如下：

(i)若 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是 n 个相异实根，则原方程的通解为

$$y(\mathrm{x})=\mathrm{C}_1e^{\lambda_1 x}+\mathrm{C}_2e^{\lambda_2 x}+...+\mathrm{C}_ne^{\lambda_n x}$$

(ii)若 $\lambda=\lambda_0$ 为特征方程的 $k(\mathrm{k}\le\mathrm{n})$ 重实根，则原方程的通解中含有

$$(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\mathrm{x}+...+\mathrm{C}_k\mathrm{x}^{k-1})e^{\lambda_0 x}$$

(iii)若 $\alpha\pm i\beta$ 为特征方程的 $k(\mathrm{k}\le\mathrm{n})$ 重共轭复根，则原方程的通解中含有

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2\mathrm{x}+...+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+...+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

5. 二阶常系数线性非齐次方程

二阶齐次线性方程的一般形式为 $y''+py'+qy=f(x)$，其中 p,q 为实常数。由于非齐

次线性方程的通解，等于它的任一特解与对应齐次线性方程的通解之和。根据 f(x)具有下列特殊情形时，来给出求其特解的公式：

(1) $f(x)=P_n(x)$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式

特解形式分为三种情况：

（i）0 不是特征根：$y^*(x)=H_n(x)$

（ii）0 是特征方程的单根：$y^*(x)=xH_n(x)$

（iii）0 是特征方程的重根：$y^*(x)=x^2H_n(x)$

(2) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式

特解形式分为三种情况：

（i）α 不是特征根：$y^*(x)=H_n(x)e^{\alpha x}$

（ii）α 是特征方程的单根：$y^*(x)=xH_n(x)e^{\alpha x}$

（iii）α 是特征方程的重根：$y^*(x)=x^2H_n(x)e^{\alpha x}$

(3) $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x]$，$P_n(x),\mathrm{Q}_m(x)$ 为 n 次，m 次多项式

特解形式分为二种情况：

（i）$\alpha\pm i\beta$ 不是特征根：$y^*(x)=e^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$

（ii）$\alpha\pm i\beta$ 是特征根：$y^*(x)=xe^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$

其中 l 次多项式 $R_l(x),S_l(x)$ 中 $l=\max\{\mathrm{m},\mathrm{n}\}$。

(4) $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，　**特解：** $y^*(x)=y_1(x)+y_2(x)$

例 5 求下列微分方程

（1）$y''+4y'+4y=e^{-2x}$

（2）$y''+y=e^x\sin x$

解：（1）$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$

（2）$y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x\left(-\dfrac{2}{5}\cos x+\dfrac{1}{5}\sin x\right)$

6. 欧拉方程

形如 $x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$ 的方程（其中 p_1，p_2，…，p_n 为常

数），叫做欧拉方程。作代换 $x=e^t$，即可将原方程化为 n 阶常系数线性微分方程。

特别的，对于二阶欧拉方程

$$x^2y''+axy'+by=f(x)$$

令 $x=e^t, t=\ln x \Rightarrow xy'=\frac{dy}{dt}, x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow (\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+a\frac{dy}{dt}+by=f(e^t)$$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=f(e^t)$ 即化成了二阶线性常微分方程。

例 6 欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为（）

解：$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$

第六章　向量代数和空间解析几何

6.1 与向量有关的基本概念

1.向量的定义

既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）。

2.向量的表示

若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，点 M 的坐标 (x,y,z) 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，且有向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，通常记作 $\{x,y,z\}$。

3.向量的模的定义

向量的大小（长度）称作向量的摸，记作 $|\boldsymbol{a}|$。

4.零向量的定义

模为 0 的向量称为零向量，记作 $\vec{0}$，零向量的方向可认为是任意的。

5.单位向量的定义

模为 1 的向量称为单位向量，通常用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量。例如 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

6.共线向量的定义

方向相同或相反的向量称为共线向量。

7.共面向量的定义

平行于同一平面的向量称为共面向量。

8.向量的夹角的定义

从同一点出发的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，他们所成的两个角中不超过 π 的那个角称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。设 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则当 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 时， 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

9.向量的方向角和方向余弦的定义

若向量 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，它与三个坐标向量 i,j,k 的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，例如 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则，

$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

且满足$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$。

例 1. 已知两点$M_1\left(4,\sqrt{2},1\right)$和$M_2\left(3,0,2\right)$，试求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴上的投影、在 y 轴上的分向量、$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦及方向角.

6.2 向量的运算及性质

1.向量的加减运算

（1）几何表示：以$\boldsymbol{a}$的终点作为$\boldsymbol{b}$的起点，从$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点所作的向量称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；以$\boldsymbol{b}$的终点作为起点，从$\boldsymbol{a}$的终点为终点所作的向量称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记作$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

（2）坐标表示：设$\boldsymbol{a}_j = x_j\boldsymbol{i} + y_j\boldsymbol{j} + z_j\boldsymbol{k} = \left\{x_j, y_j, z_j\right\}, j=1,2$，则

$$\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2 = \left\{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\right\}.$$

（3）运算法则：

(i)交换律：***a***+***b***=***b***+***a***

(ii)分配律：(***a***+***b***)+***c***=***a***+(***b***+***c***)

2.数乘运算

（1）几何表示：$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，其模$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，而方向性规定为：若$\lambda$>0，则$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向，若$\lambda$<0，则$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向。

（2）坐标表示：若$\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$，则$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$。

（3）运算法则：

(i) 交换律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(ii) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

3.向量的数量积（点积、内积）

（1）几何表示：$\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2$是一个数，规定为$\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2 = |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\cos\theta$，其中$\theta$是$\boldsymbol{a}_1$与$\boldsymbol{a}_2$的夹角。

（2）坐标表示：设$\boldsymbol{a}_j = x_j\boldsymbol{i} + y_j\boldsymbol{j} + z_j\boldsymbol{k} = \left\{x_j, y_j, z_j\right\}, j=1,2$，则

$\boldsymbol{a}_1 \bullet \boldsymbol{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$。

（3）运算法则：

(i) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(ii) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(iii) 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

（4）数量积在几何上的应用：

(i) 求向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 。

(ii) 求两个向量之间夹角的余弦：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，其中$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。

(iii) 判断两向量垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

4.向量的向量积（叉积、外积）

（1）几何表示：$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$是一个向量，$|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|=|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta$其中$\theta$是$\boldsymbol{a}_1$与$\boldsymbol{a}_2$的夹角，其方向规定为与$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$都垂直且$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$的方向符合右手关系。

（2）坐标表示：设$\boldsymbol{a}_j=x_j\boldsymbol{i}+y_j\boldsymbol{j}+z_j\boldsymbol{k}=\{x_j,y_j,z_j\},j=1,2$，则

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

（3）运算法则：

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(ii) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(iii) 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

（4）数量积在几何上的应用：

(i) 求同垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的向量：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(ii) 求以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$

(iii) 判断两向量平行：$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

5.混合积

（1）定义：三个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$的混合积是一个数，规定为$[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{a}_3$，用坐标操作就是

$$(a_1,a_2,a_3)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

（2）运算法则：

(i) 轮换对称性：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

(ii) 两向量互换，混合积变号：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$

(iii) 分配律：$[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$

(iv) 与数乘的结合律：$[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$

（3）混合积在几何上的应用：

求以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积：$V=|[\boldsymbol{abc}]|$

例 2 已知$\mathbf{a}=\mathbf{i},\mathbf{b}=\mathbf{j}-2\mathbf{k},\mathbf{c}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$，试求一单位向量$\gamma$，使得$\gamma\perp\mathbf{c}$且$\gamma$与$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$共面。

解：$\gamma=\pm\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

6.3 平面方程

1.平面方程的一般式方程

$Ax+By+Cz+D=0$, $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的法向量，其中 A,B,C 不全为零。

2.平面方程的点法式方程

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中 (x_0,y_0,z_0) 为平面上的任意取定的一点，$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面的法向量，A,B,C 不全为零。

3.平面方程的截距式方程

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 分别为平面在三个坐标轴上的截距且均不为零。

例 已知平面过点 $M_0(1,0,-1)$ 和直线 $L_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$，求平面方程.

解：$x+3y-2z-3=0$

6.4 旋转面

1.旋转面的定义

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,这条定直线叫做旋转曲面的轴。

2.旋转曲面的方程

在 xOy、yOz、xOz 坐标面上的曲线绕其所在坐标面上的坐标轴旋转产生的旋转面的形式完全类似。现举例说明在 yOz 坐标面的情况：

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C,它的方程为$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$

（1）曲线 C 绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ 其中"±"由 C 中 y 所允许的符号确定。

旋转曲面方程求证过程如下：

设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任一点,它是曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转而得到的.因此

有如下关系等式：

$$\begin{cases} f(y_1,z_1)=0; \\ z=z_1; \\ |y_1|=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$，从而得 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$,这就是所求旋转曲面的方程。

（2）曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$，其中"±"由 C 中 z 所允许的符号确定。

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+3z^2=9 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解：$x^2+y^2+3z^2=9$

6.5 柱面

1.柱面的定义

Γ是一条空间曲线，直线 L 沿Γ平行移动所产生的曲面叫做柱面，Γ称为柱面的准线，L 叫柱面的母线。

2.柱面的方程的建立

（1）若准线的方程Γ：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，母线的方向向量是 ***s***={*l*，*m*，*n*}，

柱面方程建立过程如下：

先在准线Γ上任取一点 (x_0,y_0,z_0)，则过点 (x_0,y_0,z_0) 的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

消去由准线方程Γ和母线方程组成的方程组中的 x_0,y_0,z_0，得到关于 x,y,z 的方程即为所求。

（2）若准线方程是Γ：$\begin{cases} x=f(\mathrm{t}) \\ y=g(\mathrm{t}),t\in(\alpha,\beta) \\ z=h(\mathrm{t}) \end{cases}$ 母线的方向向量是 ***s***={*l*，*m*，*n*}

柱面的方程是 $\begin{cases} x=f(\mathrm{t})+\mathrm{lu} \\ y=g(\mathrm{t})+\mathrm{mu},(\alpha<\mathrm{t}<\beta,-\infty<\mathrm{u}<+\infty) \\ z=h(\mathrm{t})+\mathrm{nu} \end{cases}$

（3）若准线的方程Γ：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

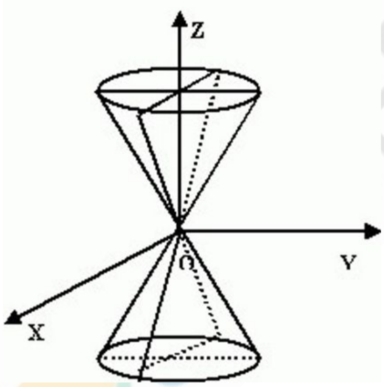
（i）当母线平行于 z 轴时，柱面的方程是 $f(x,y)=0$

（ii）当母线的方向向量是 ***s***={*l*，*m*，*n*}时，柱面的方程是 $f(x-\frac{l}{n}z, y-\frac{m}{n}z)=0$ 。

6.6 常见的二次曲面及图形

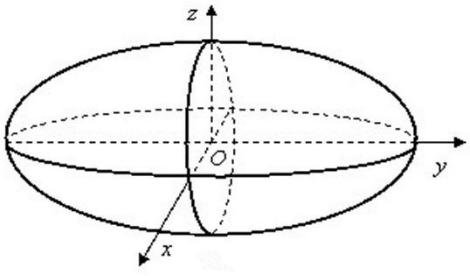
1.二次锥面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 所表示的曲面称为二次锥面。



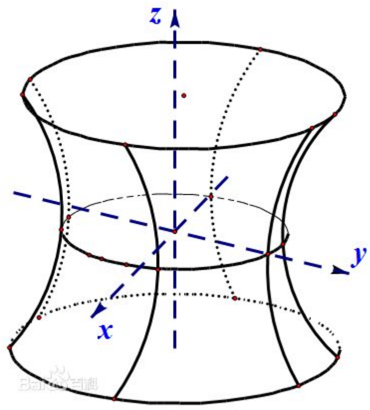
2.椭球面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为椭球面。



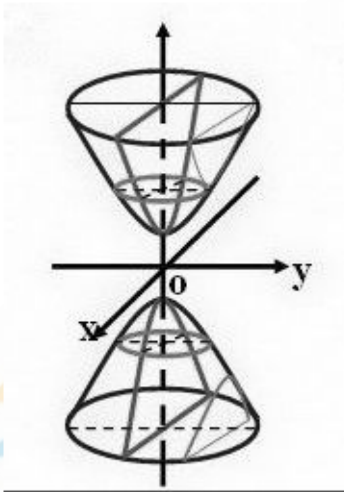
3.单叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为单叶双曲面。



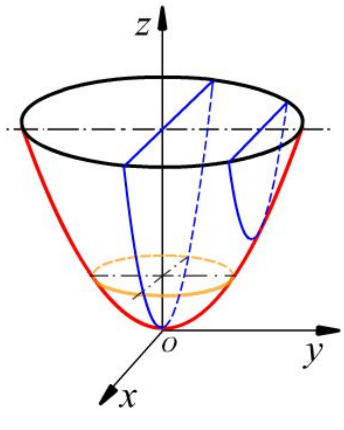
4.双叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为双叶双曲面。



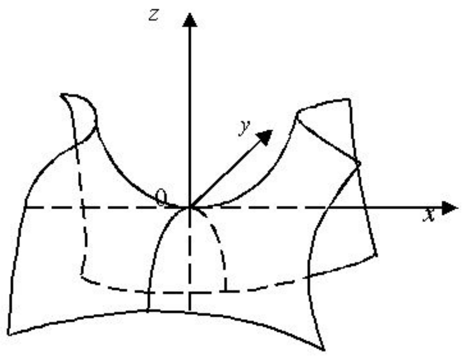
5.椭圆抛物面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$所表示的曲面称为椭圆抛物面.



6.双曲抛物面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$所表示的曲面称为双曲抛物面。



6.7 空间曲线

1.空间曲线的一般式方程

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，其中$F(x,y,z)=0$与$G(x,y,z)=0$为空间任意曲面。

2.空间曲线的参数方程

$\begin{cases} x=x(\mathrm{t}) \\ y=y(\mathrm{t}), \\ z=z(\mathrm{t}) \end{cases}$给定一个$t$，便可得到曲线上的一点。

3.空间曲线在坐标轴上的投影

（1）投影柱面：

设空间曲线 *C* 的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，方程组消去变量 *z* 后所得的方程 *H*(*x*,*y*)=0,这就是空间曲线 *C* 关于 *xOy* 面的投影柱面。该柱面必定包含曲线 *C*。

（2）投影曲线（投影）:

（i）投影曲线的一般式方程：

设空间曲线 *C* 的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，方程组消去变量 *z* 后所得的方程

H(*x*,*y*)=0,空间曲线 *C* 在 *xOy* 面上的投影曲线的方程为:

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

（ii）投影曲线的参数式方程：

设曲线 *C* 参数方程为 $\begin{cases} x=f(\mathrm{t}) \\ y=g(\mathrm{t}) \\ z=h(\mathrm{t}) \end{cases}$，则 $\begin{cases} x=f(\mathrm{t}) \\ y=g(\mathrm{t}) \\ z=0 \end{cases}$ 是 *C* 在 *xOy* 平面上的投影曲线方程。

6.8 直线方程

1.直线的一般式方程

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 该直线为两平面的交线，这里假设 $\{A_1,B_1,C_1\}$ 与 $\{A_2,B_2,C_2\}$ 不共线。

2.直线的对称式方程

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上的任意取定的一点，**s**={*l*,*m*,*n*}为直线的方向向量，*l*,*m*,*n* 不全为零。

3.直线的参数式方程

$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$,其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上的任意取定的一点，**s**={*l*,*m*,*n*}为直线的方向向量，*l*,*m*,*n* 不全为零。

例 用对称式方程及参数方程表示直线 $L:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

6.9 平面与直线之间的位置关系

1.平面与平面之间的位置关系

设平面 Π_1： $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 Π_2： $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

（1）平面 Π_1 和 Π_2 垂直 $\Leftrightarrow$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ ；

（2）平面 Π_1 和 Π_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.其中若某分母为零，则对应的分子也为零。

（3）平面Π_1和Π_2的夹角θ可由以下公式确定：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

2.直线与直线之间的位置关系

设有两直线$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$,则

（1） $L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0;$

（2） $L_1//L_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

（3）直线L_1和L_2的夹角φ可由以下公式确定：

$$\cos\phi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}(0\le\phi\le\frac{\pi}{2})$$

3.平面与直线之间的位置关系

设平面Π：$Ax+By+Cz+D=0$，直线$L:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$，则

（1） $L\perp\Pi\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

（2） $L//P\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$

（3）直线 L 与平面Π的夹角为φ 由以下公式确定：

$$\sin\phi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}(0\le\phi\le\frac{\pi}{2})$$

4.点到平面的距离公式

点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面Π：$Ax+By+Cz=0$ 的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cos(\widehat{\overrightarrow{P_0P_1},\mathbf{n}})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\bullet\mathbf{n}\right|}{|\mathbf{n}|},$$

其中P_1与 $\boldsymbol{n}$ 分别是平面Π上的定点与法向量，按向量的点乘与模的运算得：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5.点到直线的距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 L：$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离是：

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\sin\left\langle\widehat{\overrightarrow{P_0P_1},\boldsymbol{S}}\right\rangle=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{S}\right|}{|\boldsymbol{S}|},$$

其中 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 **S** 分别是直线 L 上的定点与方向向量，按向量叉积与模的计算得：

$$d=\frac{\left|\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}\times\{l,m,n\}\right|}{\left|\{l,m,n\}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

第七章 多元函数微分学

7.1 多元函数的概念、极限与连续性

1．多元函数的概念

（1）二元函数定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为 $z=f(x,y),(x,y)\in D$，其中点集 D 称为该函数的定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量.

（2）二元函数的几何意义

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，当(x,y)取遍 D 上的一切点时，对应得到一个空间点集 $\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$,这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形,二元函数的图形是一张曲面.

（3）一元函数与多元函数的联系与区别

（i）一元函数是二元函数的特殊情形：让一自变量变动，另一自变量固定，或让(x,y)沿某线变动，二元函数就转化为一元函数。

（ii）一元函数中，自变量 x 代表直线上的点，只有两个变动方向，而二元函数中，自变量(x,y)代表平面上的点，它有无数个变动方向。

（iii）一元函数 $z=f(x),(a<x<b)$，也可以看成二元函数，其定义域是：$a<x<b,-\infty<y<+\infty$.

2.二元函数的极限

（1）二元函数极限的定义：

（i）与一元函数的极限概念类似,如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

（ii）设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果存在常数 A, 对于任意给定的正数ε总存在正数δ,使得当 $P(x,y)\in D\cap\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限,记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

（2）极限与无穷小的关系：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\mathrm{A} \Leftrightarrow f(x,y)=\mathrm{A}+\alpha(x,y),((x,y)\to(x_0,y_0))$$

其中 $\alpha(x,y)$ 是无穷小量，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y)=0$

注：求二元函数的极限常用方法，是直接用极限运算法则，或通过适当的放大缩小法，变量替换法转换为求简单的极限或一元函数的极限。

（3）二元函数与一元函数之极限存在性的区别

与一元函数极限中的“函数在一点处的极限存在当且仅当它在该点处的左、右极限存在且相等”这个理论对应，在二元函数的极限中，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\mathrm{A}$ 存在的充要条件是当点 $P(x,y)$ 在定义域内沿任何路径以任何方式趋近于 $P(x_0,y_0)$ 时，均有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，且等于 A。

注：若在定义域内沿某两条不同路径（如 $y=kx$， $y^2=x$），极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 的值不相等或某一路径极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，则可断言重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。这是证明二元函数极限不存在的有效方法。

3.二元函数的连续性

（1）定义：

如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

（2）二元函数在其定义域上连续

由自变量 x 的初等函数及其自变量 y 的初等函数经过有限次四则或复合而得的二元函数称为二元初等函数。多元初等函数在其定义区间内是连续的。

（3）二元连续函数的性质

（i）在有界闭区域 D 上的二元连续函数,必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

（ii）在有界闭区域 D 上的二元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

例 1.求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^3+y^3\right)\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+3y^2\right)^2}$

答案：0

例 2.讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 是否存在

7.2 多元函数的偏导数

1.偏导数的概念

（1）偏导数的定义

对于二元函数 $z=f(x,y)$ 如果只有自变量 x 变化,而自变量 y 固定,这时它就是 x 的一元函数

,这函数对 x 的导数,就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对于 x 的偏导数.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时

,相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0)

处对 x 的偏导数,记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$,或 $f_x(x_0,y_0)$.

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$,或 $f_y(x_0,y_0)$

注：求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数；求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，只要把 x 暂时看作常量而对

y 求导数.

[例题]：求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$

(2) 偏导数的几何意义

由于

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}\left(f\left(x,y_0\right)\right)\Big|_{x=x_0}$$

可见偏导数的几何意义为：曲线 $\begin{cases}z=f\left(x,y\right)\\y=y_0\end{cases}$（曲面 $z=f\left(x,y\right)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线）在

点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率。

2.偏导数的计算

（1）求偏导数，归结为求一元函数的导数。

（2）求 $f(x,y)=\begin{cases} g(x,y), & (x,y)\neq(x_0,y_0) \\ A, & (x,y)=(x_0,y_0) \end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数的方法：

按定义：$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x_0+\Delta x,y_0)-A}{\Delta x}$

例 1.设 $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^4}$，试讨论在 R^2 上偏导数的存在性，在偏导数存在处求出偏导数

3.高阶偏导数

（1）二阶偏导数

函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$,

那么在 D 内 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数.如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的二阶偏导数.按照对变量求导次序的为同有下列四个二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

（2）混合偏导数

根据上面所说的四个二阶偏导数中

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial y})=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$ 称为混合偏导数.

（3）同样可得三阶、四阶以及 *n* 阶偏导数.二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

（4）混合偏导数与求偏导的先后次序无关

若函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 都在区域 D 上连续，则在区域 D 内，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶混合偏导数与求偏导数的先后次序无关。

例 2.设函数 $F\left(x,y\right)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}dt$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}$.

答案：4

7.3 多元函数的可微性与全微分

1.全微分的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，如果在该点的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ $(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$),

其中 A、B 不依赖于 Δx 、Δy 而仅与 x、y 有关,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分,记作 dz,即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$。

如果函数在区域 D 内各点处都可微分,那么称这函数在 D 内可微分.

[例题] 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分

解：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，所以 $dz=2xydx+(x^2+2y)dy$

2.函数可微的条件

（1）可微的充分条件

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续,则函数在该点可微分.

例 1.已知连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-2x+3y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，求 $dz\big|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

答案：$2dx-3dy$

（2）可微的必要条件

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,则函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在,且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

例 2.讨论 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $P(0,0)$ 的偏导数是否存在，可微性、连续性以及偏导数连续性

7.4 多元函数的求导法则

1.多元复合函数的求导法则

（1）多元函数与一元函数的复合

如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导,函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点 t 可导,且有 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$.

（2）复合函数的中间变量均为多元函数的情形

如果函数 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点(x,y)的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

推广:设 $z=f(u,v,w)$,$u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$,$w=\omega(x,y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

注：设 $z=f\left(u,v,w\right)$，我们常用 f_1' 表示 $f\left(u,v,w\right)$ 对第一个变量 u 的偏导数，类似的有

$f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$， $f_3'=\frac{\partial f}{\partial w}$， $f_{11}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$， $f_{12}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$， $f_{23}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}$ 等等。

（3）复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形

如果函数 $u=\varphi(x,y)$在点(x,y)具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$在点 y 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}.$$

例 1.求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$$z=f(xy,\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$$

例 2.设函数 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\ \varphi(x)=f[x,f(x,x)]$, 求 $\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

答案：51

2.全微分的形式不变性

设 $z=f(u,v)$具有连续偏导数,则有全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$.

如果 $z=f(u,v)$具有连续偏导数,而 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$也具有连续偏导数,则 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$=(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

由此可见,无论 z 是自变量或中间变量 u、v 的函数,函数 $z=f(u,v)$它的全微分形式是一样的.这个性质叫做全微分形式不变性.

注：在求多元隐函数的偏导数或全微分时，一阶全微分形式不变性是重要工具。

3. 隐函数的求导法则

（1）由方程式确定的隐函数的求导法

(i)由一个方程式确定的一元隐函数求导法

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$,它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

求导公式证明:将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)=0$,得恒等式 $F(x,f(x))\equiv0$,

等式两边对 x 求导得 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$，由于 F_y 连续,且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F_y\neq 0$，于是得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\bullet\frac{dy}{dx}$$

（ii）由一个方程式确定的二元隐函数求导法

设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0, F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

注：公式的证明:将 $z=f(x,y)$代入 $F(x,y,z)=0$,得 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$,

将上式两端分别对 x 和 y 求导,得 $F_x+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, F_y+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

因为 F_z 连续且 $F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ，所以存在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域,使 $F_z\neq 0$,于是得

$$,\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

（2）由方程组确定的隐函数的求导法

（i）由方程组确定的一元隐函数求导法

设有 3 个变量 2 个方程构成的方程组 $\begin{cases}F(x,u,v)=0\\G(x,u,v)=0\end{cases}$ 其中 F,G 有连续偏导数，若在区间 I 上存在函数组 $u=u(x),v=v(x)$满足该方程组，则说该方程组确定了隐函数 $u=u(x),v=v(x)$。若它们可导并求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$，则由 $\begin{cases}F(\mathrm{x},\mathrm{u}(\mathrm{x}),\mathrm{v}(\mathrm{x}))=0\\G(\mathrm{x},\mathrm{u}(\mathrm{x}),\mathrm{v}(\mathrm{x}))=0\end{cases}$ 两边分别对 x 求导，应用复合函数求导法则可得

$\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$ 这可看成是以 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、$\frac{\partial v}{\partial x}$ 为未知量的二元一次方程组，可利用克莱姆法则求出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$。

（ii）由方程组确定的二元隐函数求导法

设有 4 个变量 2 个方程构成的方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x，y),v=v(x，y)$ 其中 F,G 有连续偏导数，则

偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 由方程组 $\begin{cases} F_x^{"}+F_u^{"}\frac{\partial u}{\partial x}+F_v^{"}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x^{"}+G_u^{"}\frac{\partial u}{\partial x}+G_v^{"}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$ 确定;

偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 由方程组 $\begin{cases} F_y^{"}+F_u^{"}\frac{\partial u}{\partial y}+F_v^{"}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ G_y^{"}+G_u^{"}\frac{\partial u}{\partial y}+G_v^{"}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$ 确定.

例 1.已知 $z=f\left(x,x+y\right)$，f 二阶偏导连续，$x^2\left(y-1\right)+e^y=1$, 求 $\frac{d^2z}{dx^2}|_{x=0}$

7.5 多元函数的极值

1.多元函数极值及驻点

（1）**极值概念：**

设函数 *z=f(x,y)*在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,如果对于该邻域内任何异于 (x_0,y_0) 的点 *(x,y)*, 都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$）,

则称函数在点 (x_0,y_0) 有极大值(或极小值) $f(x_0,y_0)$。

极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

（2）驻点概念：

凡是能使 $f_x'(x,y)=0, f_y'(x,y)=0$ 同时成立的点 $\left(x,y\right)$ 称为 $z=f\left(x,y\right)$ 的驻点。

2.多元函数取得极值的条件

（1）必要条件：

设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则有 $f_x'(x,y)=0, f_y'(x,y)=0$ 。

注：由上述条件可知具有偏导数的函数的极值点必定是驻点.但函数的驻点不一定是极值点，如函数 $z=xy$ 在原点处。

（2）**充分条件：**

设函数 *z=f(x, y)* 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x'(x,y)=0, f_y'(x,y)=0$,令 $f_{xx}''(x_0,y_0)=A, f_{xy}''(x_0,y_0)=B, f_{yy}''(x_0,y_0)=C$

则 *f (x,y)*在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(1) $AC-B^2>0$时具有极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值;

(2) $AC-B^2<0$时没有极值;

(3) $AC-B^2=0$时可能有极值,也可能没有极值.

3.求二元函数极值点的一般步骤

第一步 ：解方程组 $f_x(\mathrm{x},\mathrm{y})=0, f_y(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$,求得一切实数解,即可得一切驻点.

第二步 ：对于每一个驻点$(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$,求出二阶偏导数的值 A、B 和 C.

第三步 ：定出 $AC-B^2$ 的符号,按极值的充分条件判定 $f(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ 是否是极值、是极大值 还是极小值.

例 1.求由方程确定的函数 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定的函数 $z=z\left(x,y\right)$ 的极值.

7.6 多元函数的最大值和最小值

1. 无条件极值问题

（1）无条件极值问题

对于函数的自变量除了限制在定义域内之外，并无其他条件限制，这类极值问题称为无条件极值问题。

（2）求二元函数的最大值最小值

如果 $f(x，y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上必定能取得最大值和最小值(最值或在 $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 得点处达到，或在偏导数不存在的点处达到，或在 D 的边界点上达到)。

求连续函数 $f(x，y)$在有界区域 D 上的最值的一般步骤是：

（i） 第一步：求出函数 $f(x,y)$在 D 内可能取得极值点（驻点和一阶偏导数不存在的点）的函数值。

（ii）第二步：求出函数 $f(x,y)$在 D 的边界上的最大、最小值。

（iii）第三步：将函数 $f(x,y)$在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较,其中最大的就是最大值,最小的就是最小值.

注： 在实际问题中,如果知道函数 $f(x,y)$的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得,而函数在 D 内只有一个驻点,那么该驻点处的函数值就是函数 $f(x,y)$在 D 上的最大值(最小值).

2.求条件极值问题

（1）条件极值问题提法

对于函数的自变量除了限制在定义域内之外，还有附加的条件，这类极值问题称为条件极值问题。

（2）求二元函数或者三元函数条件极值问题下的最大值最小值

（i）**方法一：化为无条件极值**，若在条件$\varphi(x,y)=0$中可以解出$y=y(x)$或$x=x(y)$，把它带入到$z=f(x,y)$，则可化为相应一元函数的最值问题。

（ii）**方法二：利用拉格朗日乘数法**

1）求函数 $z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$ 下的极值

首先构造辅助函数（称为拉格朗日函数）$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，然后求解方程组

$$\begin{cases} F_x'(x,y)=f_x'(x,y)+\lambda\phi_x'(x,y)=0 \\ F_y'(x,y)=f_y'(x,y)+\lambda\phi_y'(x,y)=0 \\ \phi(x,y)=0 \end{cases}$$

所有满足此方程组的解(x,y,λ)是$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下可能的极值点，最后比较这些可能的极值点（若曲线$\varphi(x,y)=0$含端点，还需考察其端点）的函数值得出最大值点或最小值点。

2）求函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$下的最大值和最小值。

拉格朗日乘数法：首先构造辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

然后求解方程组

$$\begin{cases} F_x'(x,y,z)=f_x'(x,y,z)+\lambda\varphi_x'(x,y,z)+\mu\psi_x'(x,y,z)=0 \\ F_y'(x,y,z)=f_y'(x,y,z)+\lambda\varphi_y'(x,y,z)+\mu\psi_y'(x,y,z)=0 \\ F_z'(x,y,z)=f_z'(x,y,z)+\lambda\varphi_z'(x,y,z)+\mu\psi_z'(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

所有满足此方程组的解即是目标函数在条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$下的可能的极值点。最后由可能的极值点中求得最大值或最小值点。

例 1. 求函数$u=xy^2z^3$在条件$x+y+z=a$（其中$a,x,y,z\in R^+$）下的最大值.

答案：$\dfrac{a^6}{432}$

例 2. 求函数$z=x^2-xy+y^2$在区域$|x|+|y|\le 1$上的最大值和最小值.

答案：最大值为 1；最小值为 0.

7.7 方向导数和梯度

1.方向导数

(1)方向导数的概念

设 l 是 xOy 平面上以$P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线$e_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与 l 同方向的单位向

量. 射线 *l* 的参数方程为 $x=x_0+t\cos\alpha, y=y_0+t\cos\beta(\mathrm{t}\geq 0)$。

设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $\mathrm{U}(P_0)$ 内有定义，且 $P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$ 为 *l* 上另一点, 且 $P\in\mathrm{U}(P_0)$.

若极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$ 存在,则称此极限为函数 *f(x,y)* 在点 P_0 沿方向 *l* 的方向导数,记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$,即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

注：从方向导数的定义可知, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数 *f(x,y)* 在点 $P_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ 处沿方向 *l* 的变化率.

（2）方向导数的存在性与计算公式

（i）如果函数 *z=f(x,y)* 在点 $P_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ 可微分,那么函数在该点沿任一方向 *l* 的方向导数都存在,且有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$,

其中 $\cos\alpha$,$\cos\beta$ 是 *l* 的方向余弦.

（ii） 对于三元函数 *f(x,y,z)* 来说，它在空间一点 $P(x_0,y_0,\mathrm{z}_0)$ 沿 $e_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

如果函数 *f(x,y,z)* 在点 (x_0,y_0,z_0) 可微分,则函数在该点沿着方向 $e_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的*方向导数为*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,\mathrm{z}_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,\mathrm{z}_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,\mathrm{z}_0)\cos\gamma$$

2.梯度

（1）定义：设函数 *z=f(x,y)* 在平面区域 *D* 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)\in\mathrm{D}$,都可确定一个向量 $f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$,

这向量称为函数 $f(x,y)$在点 $P_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ 的梯度,记作 $\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)$，即

$$\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

(2)梯度与方向导数的关系

如果函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分, $e_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 l 同方向的单位向量,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)\bullet e_l=\left|\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)\right|\cos<\widehat{\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0),e_l}>$$

这一关系式表明了函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系. 特别, 当向量 e_l 与 $\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)$ 的夹角 θ=0, 即沿梯度方向时, 方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 取得最大值, 这个最大值就是梯度的模 $\left|\boldsymbol{grad}f(x_0,y_0)\right|$. 这就是说: 函数在一点的梯度是个向量, 它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向, 它的模就等于方向导数的最大值.

例 1.在球面 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在改点处沿 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,0,1)$ 方向的方向导数最大，并求出该最大方向导数.

答案：$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，$\sqrt{2}$

7.8 多元函数微分学的几何应用

1.空间曲线的切线与法平面

（1）空间曲线的切线

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t),(\alpha\le t\le\beta)\\ z=\omega(t)\end{cases}$,

又 $M_0(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 是 Γ 上的一点，则 Γ 在点 M_0 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

(2)曲线的法平面

（i）曲线的切向量： 切线的方向向量称为曲线的切向量.向量

$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ 就是曲线Γ在点 M_0 处的一个切向量.

（ii） 法平面：通过点 M_0 而与切线垂直的平面称为曲线Γ在点 M_0 处的法平面,其法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$ 。

[例题]：求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点（1,1,1）处的切线及法平面方程。

解：因为 $x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2$，而点（1,1,1）所对应的参数 $t_0=1$，所以

T=（1,2,3）于是，切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面方程为 $(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$

即 x+2y+3z=6

2.空间曲面的切平面与法线

（1）用隐式方程表示的曲面

（i）曲面的切平面

设曲面Σ的方程为 $F(x,y,z)=0$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面Σ上的一点,则Σ在 M_0 点的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

(ii)曲面的法线

1）曲面的法线:通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线.法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.

1）曲面的法向量:垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量.向量

$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$ 就是曲面Σ在点 M_0 处的一个法向量.

（2）用显式方程表示的曲面

（i）曲面的切平面

若空间曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$， $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上的一点， $z_0=f(x_0,y_0)$，则曲面 S 在 M_0 切平面方程为

$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(y-y_0);$$

（ii）曲面的法线

1）曲面在该点的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x^{'}(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y^{'}(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ 其中 $z=f\left(x,y\right)$ 在 (x_0,y_0) 有连续的偏导数，这里 S 在 M_0 处的法向量为 $\pm(-f_x^{'}(x_0,y_0),-f_y^{'}(x_0,y_0),1)$

2）法线的单位的法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\pm(-f_x^{'}(x_0,y_0),-f_y^{'}(x_0,y_0),1)}{\sqrt{1+f_x^{'2}(x_0,y_0)+f_y^{'2}(x_0,y_0)}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 这里的α，β，γ分别是法向量 **n** 与三个坐标轴正向的夹角，**n** 的表达式正负号的选取取决于γ是锐角还是钝角，即法向量是朝上的还是朝下的，朝上取正号，朝下取负号。

第八章 多元函数积分

8.1 二重积分

1.二重积分的定义

设 $z=f\left(x,y\right)$ 为有界闭区域 D 上的有界函数，把区域 D 任意划分成 n 个子域 $\Delta\sigma_{\mathrm{k}}(k=1,2,3,\ldots,n)$，其中 $\Delta\sigma_{\mathrm{k}}$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积。在每个小闭区域内任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并把所有乘积相加，即作出和数 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 不论子域怎样划分以及 (ξ_i,η_i) 怎样选取，上述和数当各小区域的直径中的最大值 $d\to 0$ 时的极限存在，那么称此极限为函数 $f\left(x,y\right)$ 在区域 D 上的二重积分. 记作 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)$，

其中 x 与 y 称为积分变量，函数 $f\left(x,y\right)$ 称为被积函数，$f\left(x,y\right)d\sigma$ 称为被积表达式，D 称为积分区域.

2.二重积分的几何意义

(1) 若在 D 上 $f\left(x,y\right)\geq 0$，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底，以 $f\left(x,y\right)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积.

(2) 若在 D 上 $f\left(x,y\right)\leq 0$，则上述曲顶柱体在 Oxy 面的下方，二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值是负的，其绝对值为该曲顶柱体的体积.

(3)若 $f\left(x,y\right)$ 在 D 的某些子区域上为正的，在 D 的另一些子区域上为负的，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示在这些子区域上曲顶柱体体积的代数和（即在 Oxy 平面之上的曲顶柱体体积减去 Oxy 平面之下的曲顶柱体的体积）.

3.二重积分的存在定理

(1)若 $f\left(x,y\right)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f\left(x,y\right)$ 在 D 上的二重积分必存在。

(2)若有界函数 $f\left(x,y\right)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续，则 $f\left(x,y\right)$ 在 D 可积。

4.二重积分的性质

二重积分有与定积分类似的性质。假设下面各性质中所涉及的函数 $f\left(x,y\right),g\left(x,y\right)$ 在区域D上都是可积的。

(1)有限可积函数的代数和必定可积，且函数代数和的积分等于各函数积分的代数和，即

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2)被积函数中的常数因子可以提到积分号前面，即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \qquad (k\text{为常数}).$$

(3)若D可以分为两个区域 D_1,D_2，它们除边界外无公共点，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4)若在积分区域D上有 $f\left(x,y\right)=1$，且用 $S\left(D\right)$ 表示区域D的面积，则

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma=S(D).$$

(5)若在D上处处有 $f\left(x,y\right)\le g\left(x,y\right)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊的 $$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint_D \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma.$$

(6) (估值定理) 若在D上处处有 $m\le f\left(x,y\right)\le M$，且 $S\left(D\right)$ 为区域D的面积，则

$$mS(D)\le\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le MS(D).$$

(7) (二重积分中值定理) 设 $f\left(x,y\right)$ 在有界闭区域D上连续，则在D上存在一点 (ξ,η)，使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)S(D).$$

例 1. 设平面区域 D 由直线 $y=\frac{1}{2}x,x=\frac{1}{2},x=1$ 及 x 轴围成，记 $I_1=\iint\limits_D\left[\ln\left(x-y\right)\right]^3d\sigma,\ I_2=\iint\limits_D\left(x-y\right)^3d\sigma,\ I_3=\iint\limits_D e^{(x-y)^3}d\sigma,$ 则下列正确的是（）

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

答案:A

5.二重积分的计算

（1）利用直角坐标计算二重积分：

(i) X 型区域

几何直观表现：用平行于 y 轴的直线穿过区域内部，与边界的交点最多两个。从而可以由下面和上面交点位于的曲线确定两个函数 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$；

被积区域的集合表示：$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$；

二重积分化为二次积分： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

(ii) Y 型区域

几何直观表现：用平行于 x 轴的直线穿过区域内部，与边界的交点最多两个。从而可以由左右交点位于的曲线确定两个函数 $x = x_1(x)$ 和 $x = x_2(x)$；

被积区域的集合表示：$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, x_1(x) \le x \le x_2(x)\}$；

二重积分化为二次积分： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dx \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$.

例 1. 计算二重积分$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$,其中$D$是由$y = x, y = 1$及$y$轴所围的平面闭域.

答案：$\frac{1}{6} - \frac{1}{3e}$

例 2. $\iint\limits_D x\sqrt{1 - x^2 + y^2} dxdy$,其中$D$是$y = x, x = 1, y = -1$所围的平面闭域.

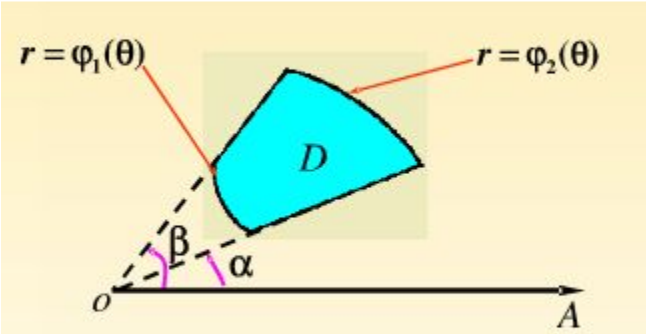
答案：$\frac{1}{2}$

（2）利用极坐标计算二重积分：

从极点 O 出发引射线穿过区域内部，与边界的交点最多两个．从而可以由下面和上面交点位于的曲线确定两个函数 $r = \varphi_1(\theta)$ 和 $r = \varphi_2(\theta)$（具体如圆域，扇形域和环域等)；

(i)极点 O 在 D 的外部的情况

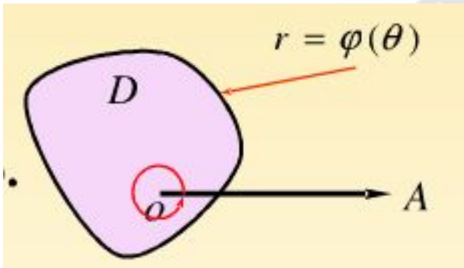
区域 D 可表示为$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)\}$，则积分公式如下:



$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

(ii)极点 O 在 D 的内部情况

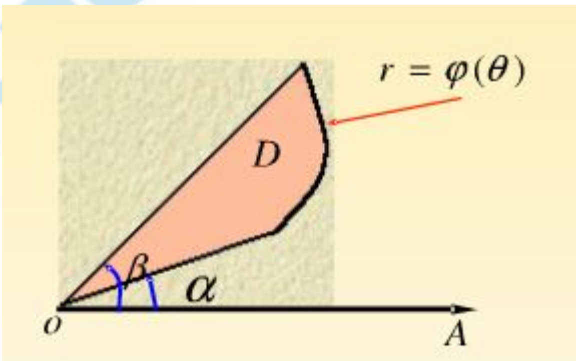
区域 D 的边界方程为 $r=\varphi(\theta),0\le\theta\le2\pi$，则积分公式如下:



$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

(iii) 极点 O 在 D 的边界上的情况

边界方程为 $r=\varphi(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$，则积分公式如下:



$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

例 3.计算二重积分 $\iint_D xdxdy$,其中 D 为不等式 $x^2+y^2\le ax(a>0)$ 确定的区域.

答案：$\dfrac{a^3}{8}\pi$

例 4.求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2=1, x=0, y=0$ 所围成的区域在第一象限的部分.

答案：$\dfrac{\pi\left(2\ln 2-1\right)}{4}$

6. 二重积分的计算技巧

(1)分块积分

在积分计算中，如果 D 的形状不能简单地用类似 X 型区域或 Y 型区域来表示，则可将 D 分成若干块，并由积分性质

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

对右端各式进行计算。

例 5. 计算$I=\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$,其中$D=\left\{\left(x,y\right)\middle| 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

答案：$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$

例 6. 计算$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$,其中$D=\left\{\left(r,\theta\right)\middle| 0\le r\le \sec\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$

答案：$\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}$

（2）交换积分次序

交换积分次序不仅要考虑到区域 D 的形状，还要考虑被积函数的特点（若 D 为 X 型,先对 y 积分）。如果按照某一积分次序的积分比较困难，若交换积分次序可能会使新的积分次序下的积分容易计算，从而完成积分的求解。具体步骤如下：

（i）确定 D 的边界曲线，画出 D 的草图；

（ii）求出 D 边界曲线的交点坐标；

（iii）将 D 的边界曲线表示为 x 或 y 的单值函数；

（iv）考虑是否要将 D 分成几块；

（v）用 x, y 的不等式表示 D .

（3）利用对称性公式简化计算

设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则

（i）当区域 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴上方部分。

（ii）当区域 D 关于 y 轴对称

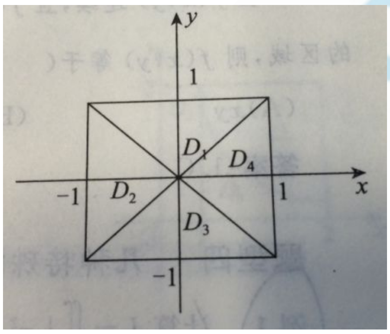
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴右侧部分。

（4）轮换对称性

设 D 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$。

例 7. 如图，正方形 $\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint_{D_k} y\cos x dxdy$，则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$_____



答案：I_1

例 8. 设区域 D=$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=(\ \ )$

$(A)ab\pi$ $\quad (B)\frac{ab\pi}{2}$ $\quad (C)(a+b)\pi$ $\quad (D)\frac{(a+b)\pi}{2}$

答案：D

8.2 三重积分

1.三重积分的定义

设 $f\left(x,y,z\right)$ 为空间有界闭区域 V 上的有界函数, 把区域 V 任意划分成 n 个子域 $\Delta v_{\mathrm{i}}(i=1,2,3,\ldots,n)$, 其中 Δv_{i} 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积。在每个小闭区域内任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$ ， 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ ， 并把所有乘积相加，即作出和数 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 。不论子域怎样划分以及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 怎样选取, 上述和数当各小区域的直径中的最大值 $\lambda\to 0$ 时的极限存在, 那么称此极限为函数 $f\left(x,y,z\right)$ 在区域 V 上的二重积分. 记作 $\iiint\limits_{V}f\left(x,y,z\right)dv$, 即 $\iiint\limits_{V}f\left(x,y,z\right)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$.

2.三重积分的存在定理

（1）有界闭区域 V 上的连续函数必可积.

（2）设 $f\left(x,y,z\right)$ 是定义在有界区域 V 上的有界函数，若 $f\left(x,y,z\right)$ 的间断点集中在有限多个零体积的曲面上，则 $f\left(x,y,z\right)$ 在 V 上必可积.

3.三重积分的性质

（1）若 $f\left(x,y,z\right)$ 在区域 V 上可积，k 为常数，则 $kf\left(x,y,z\right)$ 在 V 上也可积，且

$$\iiint\limits_{V}kf\left(x,y,z\right)dv=k\iiint\limits_{V}f\left(x,y,z\right)dv$$

（2） 若 $f\left(x,y,z\right)$，$g\left(x,y,z\right)$ 在 V 上都可积，则 $f\left(x,y,z\right)\pm g(x,y,z)$ 在 V 上也可积且 $\iiint\limits_{V}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dv=\iiint\limits_{V}f(x,y,z)dv\pm\iiint\limits_{V}g(x,y,z)dv$

（3） 若 $f\left(x,y,z\right)$ 在 V_1 和 V_2 上都可积，且 V_1 和 V_2 无公共内点，则 $f\left(x,y,z\right)$ 在 $V_1\cup V_2$ 上也可积，且 $\iiint\limits_{V_1\cup V_2}f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{V_2}f(x,y,z)dv.$

（4）若 $f\left(x,y,z\right)$，$g\left(x,y,z\right)$ 在 V 上都可积，且 $f\left(x,y,z\right)\le g\left(x,y,z\right),(x,y,z)\in V$ ，则

$$\iiint_V f(x,y,z)dv \le \iiint_V g(x,y,z)dv.$$

（5）若 $f\left(x,y,z\right)$ 在区域 V 上可积，则函数 $\left|f(x,y,z)\right|$ 在 V 上也可积，且

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)dv\right| \le \iiint_V \left|f(x,y,z)\right| dv$$

（6）若 $f\left(x,y,z\right)$ 在区域 V 上可积，V_v 是积分区域 V 的体积且 $m \le f(x,y,z) \le M$,，则

$$mV_v \le \iiint_V f(x,y,z)dv \le MV_v$$

（7）（中值定理）若 $f\left(x,y,z\right)$ 在有界闭区域 V 上连续，则存在 $\left(\xi,\eta,\zeta\right) \in V$, 使得

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V_v,$$

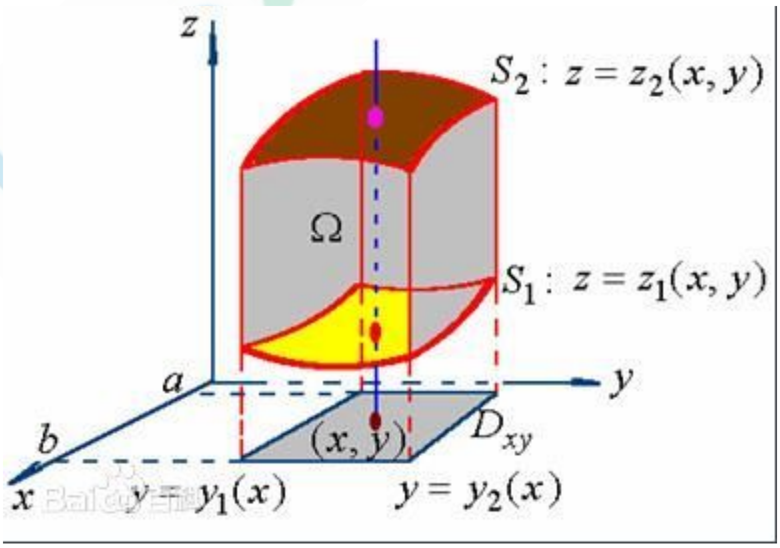
4.三重积分的计算

（1） 在直角坐标下计算：

空间积分区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 $\boldsymbol{xoy}$ 面上的投影区域为 $\boldsymbol{D_{xy}}$，过 $\boldsymbol{D_{xy}}$ 上任意一点，作平行于 $\boldsymbol{z}$ 轴的直线穿过 $\boldsymbol{\Omega}$ 内部，与 $\boldsymbol{\Omega}$ 边界曲面相交不多于两点。 亦即，$\boldsymbol{\Omega}$ 的边界曲面可分为上、下两片部分曲面.

$$S_1 : z = z_1(x,y), S_2 : z = z_2(x,y)$$

其中 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 在 $\boldsymbol{D_{xy}}$ 上连续，并且 $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$.



被积区域的集合表示：$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$，进一步地，$D_{xy}$ 可以表示成 X 型区域或 Y 型区域；

三重积分化为三次积分：

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (D_{xy}\text{ 为 X—型})$$

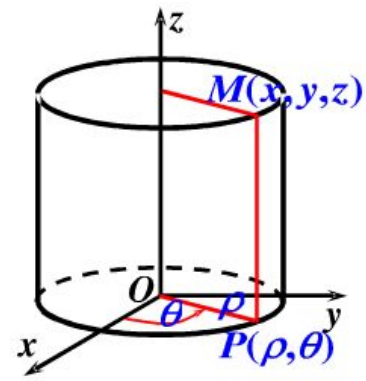
$$= \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (D_{xy}\text{ 为 Y—型})$$

【评注】：(i)，如果平行于 z 轴且穿过Ω内部的直线与边界曲面的交点多于两个,可仿照二重积分计算中所采用的方法，将Ω剖分成若干个部分,(如Ω_1,Ω_2),使在Ω上的三重积分化为各部分区域(Ω_1,Ω_2)上的三重积分,当然各部分区域（Ω_1,Ω_2）应适合对区域的要求.

（ii）三重积分还可以化为先计算一个二重积分，再计算一个定积分。(先二后一）设空间闭区域为$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_z, c_1\le z\le c_2\}$，其中$D_z$是竖标为的平面截闭区域$\Omega$所得到的一个平面闭区域，则有$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

（iii）适合的积分区域：Ω为长方体，四面体或任意形体.

（2）在柱坐标下计算：



设$M(x,y,z)$为空间中的一点，并设点M在xOy面内的投影P的极坐标为ρ、θ，那么ρ、θ、z就是点M的柱面坐标。柱坐标与直角坐标的关系及ρ、θ、z的变化范围为：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta, (0\le\rho<\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty) \\ z=z \end{cases}$$

用柱面坐标计算三重积分，通常是找出 V 在xOy平面上的投影区域 D，即当

$V=\{(x,y,z)\,|\,z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\}$时，

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$，

其中二重积分部分用极坐标计算.

被积区域的集合表示：

$$V=\{(\rho,\theta)\big|\theta_1\le\theta\le\theta_2,\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta),z_1(\rho,\theta)\le z\le z_2(\rho,\theta)\}；$$

直角坐标下的三重积分化为极坐标下的三重积分，并表示成相应的三次积分：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

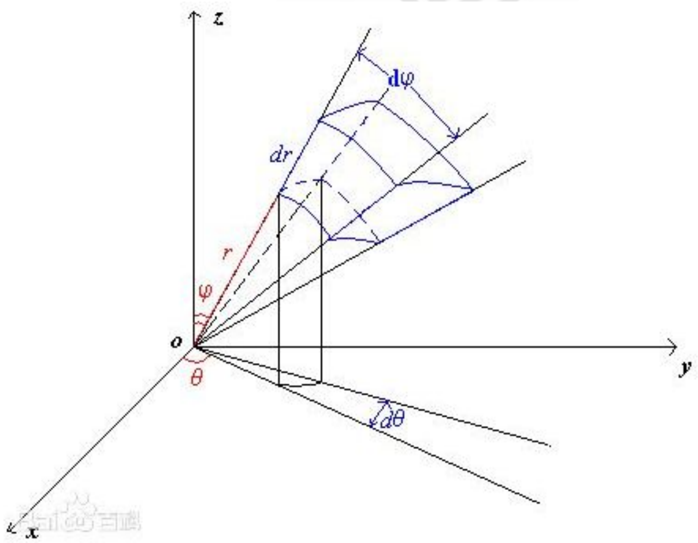
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz\ .$$

【评注】一般当积分区域是柱面、锥面，或由柱面、锥面及旋转抛物面与其它曲面所围成的形体，被积函数为

$$zf\left(x^2+y^2\right);\ zf(\frac{z}{y});\ xf\left(y^2+z^2\right),xf(\frac{z}{y});\ yf\left(x^2+z^2\right),yf(\frac{z}{x})$$

时,计算三重积分采用柱面坐标变换.

（3）在球坐标下计算：



设$M(x,y,z)$为空间中的一点，则点M也可用这样三个有次序的数r、φ、θ来确定，那么r、φ、θ就是点M的柱面坐标。球坐标与直角坐标的关系及r、φ、θ的变化范围为：

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,(0\le r<\infty,0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi)\\ \quad z=\cos\varphi\end{cases}$$

空间区域几何直观表现：从原点出发引射线穿过区域内部，与边界曲面的交点最多两个，从而可以由下面和上面交点位于的曲面确定两个球坐标函数$r=r_1(r,\theta)$和$r=r_2(r,\theta)$；（具

体如球心在原点或 z 轴上的球形域）
被积区域的集合表示：

$$V=\{(r,\theta,\varphi)\big|\theta_1\le\theta\le\theta_2,\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2,r_1(\theta,\varphi)\le r\le r_2(\theta,\varphi)\};$$

直角坐标下的三重积分化为极坐标下的三重积分，并表示成相应的三次积分：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta)r^2\sin\varphi dr.$$

例如球心在原点半径为 a 的球形域下：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta)r^2\sin\varphi dr.$$

5. 三重积分的计算技巧

（1）若平行于 xoy 面的截面面积容易求得．作为被积函数最好与 x，y 无关，即可表示为 $f(z)$,则区域表示为：

$$V=\{(x,y,z)\big|c\le z\le d,(x,y)\in D_z\},$$

其中 D_z 表示垂直于 z 轴的截面．此时，三重积分化为：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z}f(z)dxdy=\int_c^d f(z)S_{D_z}dz$$

其中 S_{D_z} 表示截面 D_z 的面积，它是关于 z 的函数。

（2）利用对称性等公式简化计算

（i）设 $f\left(x,y,z\right)$ 在有界闭区域 V 上连续，若 V 关于 xoy 平面对称，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)dV, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

其中 $V_1=V\cap\{z\ge0\}$。

V 关于 yoz 平面（xoz 平面）对称，$f\left(x,y,z\right)$ 关于 $x(y)$ 是偶函数也有类似的结论。

（ii）若对 $\forall\left(x,y,z\right)\in V$ 时，$\exists\left(y,z,x\right)\in V$，$\left(z,x,y\right)\in V$，则称空间区域 V 关于变量 $\left(x,y,z\right)$ 具有轮换对称性。若三重积分的积分区域 V 具有轮换对称性则有：

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dv=\iiint\limits_V f\left(y,z,x\right)dv=\iiint\limits_V f\left(z,x,y\right)dv,$$

$$\iiint\limits_V \left[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y) \right] dv = 3\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$$

例 1.计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

答案： $\dfrac{\pi}{8}$

例 2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdV$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2\ge z$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 所确定.

答案： $\dfrac{5\pi}{4}$

例 3.求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+3y+4z)^2\,dV$ ，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2\,(R>0)$.

答案： $\dfrac{116}{15}\pi R^5$

8.3 第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

1.第一类曲线积分定义：

设 L 为 xOy 平面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界。在 L 上任意插入一点列 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段。设第 i 个小段的长度为 Δs_i。又 (ξ_i,η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$（$i=1,2,\cdots,n$），并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ ，如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)ds$ ，即

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数， L 叫做积分弧段， ds 为弧长的微分。

注意：当 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时，对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 是存在的。

2. 第一类曲线积分的性质：

（1）设 α,β 为常数，则

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$$

（2）若 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$$

（3）设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$$

特别地，有 $\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L|f(x,y)|ds$

3. 第一类曲线积分几何意义:

$\int_L f(x,y)ds$ 是以 xOy 平面上曲线 L 为准线，母线平行于 z 轴，高为 $z=f(x,y)\ge 0$ 时柱面的面积.

4.第一类曲线积分的计算

定理 设 $f(x, y)$在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta),$$

其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导数, 且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在,

并且有 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\ (\alpha<\beta)$.

注:（1）计算时将参数式代入 $f(x,y)$，$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$，在$[\alpha,\beta]$上计算定积分。

（2）下限 α 一定要小于上限 β，$\alpha<\beta$ （$\because$ ΔS_i 恒大于零，$\therefore$ Δt_i >0）

（3） 若曲线 L 由方程 $y=\varphi(x),a\le x\le b$ 确定，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$$

若曲线 L 由方程 $r=r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$ 确定，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

若曲线 Γ 由方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t),\alpha\le t\le\beta$ 确定，则

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

5.求第一类曲线积分技巧

利用对称性与函数奇偶性简化计算：

① 若积分域 L 关于 y 轴对称,则:

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数}\\ 2\int_{L(x\ge 0)} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

② 若积分域 L 关于 x 轴对称,则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}\\ 2\int_{L(z\ge 0)} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

③ 若积分域 L 关于 $(0,0)$ 点对称,则:

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L\text{正}} f(x,y)ds & \text{当}f(-x,-y)=f(x,y)\\ 0 & \text{当}f(-x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

④ 若 L 关于 $y=x$ 对称, 则 $\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$

特别的: $\int_L f(x)ds=\int_L f(y)ds$

例 1: 计算$\int_L xds$,其中L: $y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$

答案: $\dfrac{13}{6}$

例 2.求$\int_L\left(x-y+z^2\right)ds$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

答案: $\dfrac{2\pi}{3}a^3$

8.4 第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

1.第二类曲线积分的定义:

设 L 为 xOy 平面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 L 上有界。用 L 上的点 $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $\cdots$, $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段

$$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}\ (i=1,2,\cdots,n;\quad M_0=A,\ M_n=B).$$

设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, 点 (ξ_i,η_i) 为 $M_{i-1}M_i$ 上任意取定的点。如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时, $\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限存在，则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分,记作

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$

类似地定义 $\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$

其中 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段。

2.第二类曲线积分性质

（1）设 α,β 为常数，则

$$\int_L \alpha(P_1dx+Q_1dy)+\beta(P_2dx+Q_2dy)=\alpha\int_L P_1dx+Q_1dy+\beta\int_L P_2dx+Q_2dy$$

（2）如果把 L 分成 L_1 和 L_2，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

（3）设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

即对坐标的曲线积分与曲线的方向有关。

3.对坐标的曲线积分的计算技巧：

(I) 基本计算法：统一变量,化为定积分的形式

定理 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，$\phi(t),\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\phi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

注意：在将 x、y、dx、dy 依次换为 $\phi(t)$、$\psi(t)$、$\phi'(t)dt$、$\psi'(t)dt$，下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应于 L 的终点，α 不一定小于 β

(2) 特殊情形

（i）$L: y=y(x)$　x 起点为 a，终点为 b，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx.$$

（ii） $L:x=x(y)$ y 起点为 c，终点为 d，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_c^d\{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}dy.$$

（iii）推广 $\Gamma:\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t)\end{cases}$ t 起点为 α，终点为 β，则

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

(iv)当 $\vec{L}$ 是直线 $\overline{AB}$，若有

$$\overline{AB}\perp x\text{轴时，则}\int_{\overline{AB}}P(x,y)dx=0;$$

$$\overline{AB}\perp y\text{轴时，则}\int_{\overline{AB}}Q(x,y)dy=0;$$

(3) 可采用格林公式(详见下一章节)

例 1.设 C 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针,

求:$(1)I_1=\oint_C xy^2dx+x^2ydy;(2)I_2=\oint_C\left(xy^2-2y\right)dx-\left(x^2y+\cos y\right)dy$

$(3)I_3=\oint_C xy^2dy-x^2ydx;(4)I_4=\oint_C\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

答案：$(1)0;(2)2\pi a^2;(3)\dfrac{1}{2}\pi a^4;(4)2\pi$

8.5 两类曲线积分之间的联系

1.两类曲线积分之间的关系

(1) 设有向平面曲线弧为 L： $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$L$ 上点 (x,y) 处的切线向量的方向角为 α,β，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$

2.两类曲线积分推广到空间曲线上

Γ 上点 (x,y,z) 处的切线向量的方向角为 α,β,γ，则

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

两类曲线积分之间的联系也可用向量形式表达。

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz==\int_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds=\int_{\Gamma}\vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma}\vec{A}_t ds,$$

其中 $\vec{A}=\{P,Q,R\},\vec{t}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量，$d\vec{r}=\vec{t}ds=\{dx,dy,dz\}$ 称为有向曲线元；A_t 为向量 $\vec{A}$ 在向量 $\vec{t}$ 上的投影。

8.6 第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

1.第一类曲面积分的定义：

设曲面 Σ 是光滑的，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，把 Σ 分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积），设点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 ΔS_i 上任意取定的点，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to0$ 时，这和式的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫被积函数，Σ 叫积分曲面。

2.第一类曲面积分的性质：

若 Σ 可分为分片光滑的曲面 Σ_1 及 Σ_2，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS.$$

3.对面积的曲面积分的计算技巧：

设有光滑曲面 Σ： $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$， $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy;$$

同样的：如果曲面方程为 $y=y(x,z),(x,z)\in D_{xz}$ 则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xz}}f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz;$$

或曲面方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz.$$

注意：

(i)将曲面积分化为二重积分时，究竟将积分曲面向哪一个坐标面投影，取决于Σ的方程，如Σ：$x^2+y^2=a^2$介于$z=0,z=h(>0)$之间的柱面，则Σ就不能向xoy面投影，因为Σ：$x^2+y^2=a^2$不能表示为$z=z(x,y)$的形式，但因为Σ：$x^2+y^2=a^2$可以表达为$x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$或$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，所以可以将Σ向yoz面或xoz面投影。

(ii)利用对称性简化计算：

设曲面$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中Σ_1,Σ_2关于平面$x=0$（$y=0$或$z=0$）对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \begin{cases} 0, & f(-x,y,z)=-f(x,y,z) \\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & f(-x,y,z)=f(x,y,z) \end{cases}$$

(iv)利用曲面的“轮换对称性”

若x,y,z互换，积分区域Σ不变，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma} f(z,y,x)dS = \iint_{\Sigma} f(y,z,x)dS$$

例 1. 计算$\oiint_S \frac{1}{(1+x+y)^2}dS$，其中$S$为四面体$x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0$及$z\ge 0$的边界面.

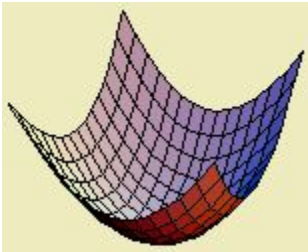
答案：$\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-1\right)\ln 2$

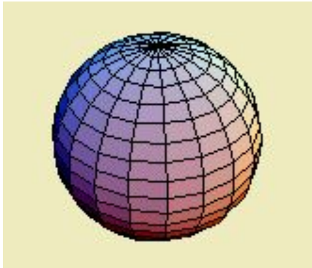
8.7 第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

1.有向曲面

在讨论对坐标的曲面积分时，需要指定曲面的侧。可通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧。假设曲面是光滑的，观察以下曲面的侧：

曲面分上侧和下侧　　　　　　　　曲面分内侧和外侧

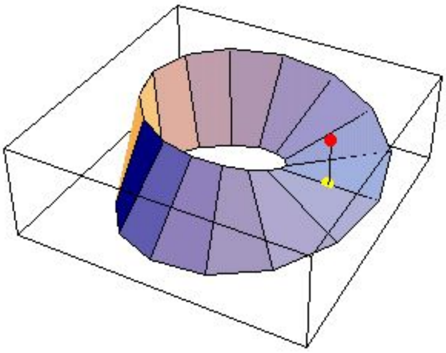




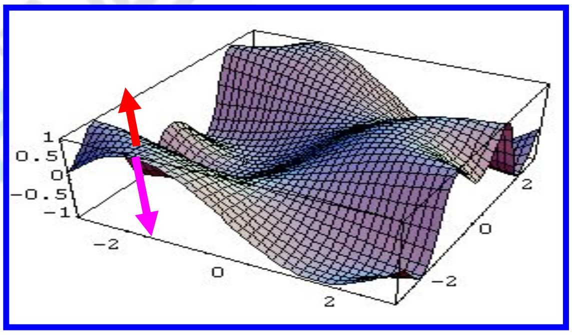
曲面法向量的指向决定曲面的侧，对于这种取定了法向量亦即选定了侧的曲面，就称作有向曲面。

此外曲面的分类有双侧曲面和单侧曲面两类。

典型单侧曲面:莫比乌斯带



典型双侧曲面



2.曲面投影

在有向曲面 Σ 上取一小块曲面 ΔS ，ΔS在xoy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为：

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}.\\ 0 & \text{当}\cos\gamma=0\text{时}\end{cases}$$

其中$(\Delta\sigma)_{xy}$表示投影区域的面积.

3.第二类曲面积分定义

设 Σ 为光滑的有向曲面，函数在 Σ 上有界，把 Σ 分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积)，ΔS_i 在 xoy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

总存在，则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分(也称第二类曲面积分)，记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

类似可定义

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

注：当 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上连续时,对坐标的曲面积分存在。

4.第二类曲面积分性质:

（1）如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &= \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\end{aligned}$$

（2）设 Σ 为有向曲面，Σ^- 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面，则

$$\iint\limits_{-\Sigma} P(x, y, z)dydz = -\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dydz$$

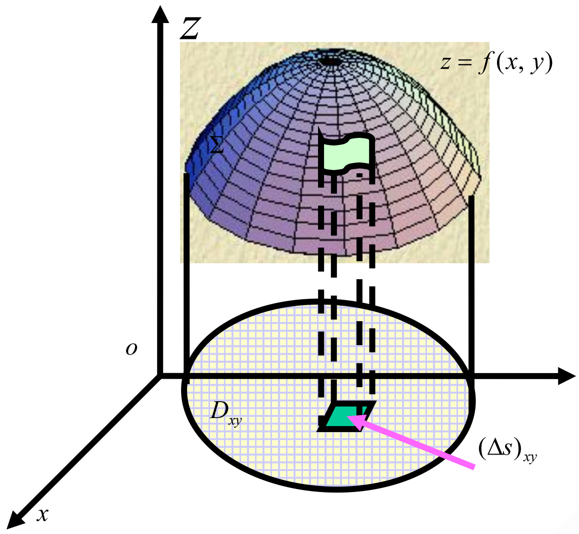
$$\iint\limits_{-\Sigma} Q(x, y, z)dzdx = -\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)dzdx$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$$

故而对于坐标的曲面积分，必须注意积分曲面所取的侧。

5.对坐标的曲面积分的计算

（1）化为二重积分进行计算（分面投影法）



设积分曲面Σ是由方程$z=z(x,y)$所给出的曲面上侧，Σ在xoy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续。则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy,$$

其中正负号的选择是：对应于Σ的那一侧的法线与z轴的正向的夹角为锐角时取正号，为钝角时取负号，即当Σ表示曲面上侧时取正号，下侧时取负号。

类似地，有：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz,$$

其中正负号的选择是：对应于Σ的那一侧的法线与x轴的正向的夹角为锐角时取正号，为钝角时取负号，也就是当Σ表示曲面的前侧时取正号，表示后侧时取负号。

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx,$$

其中正负号的选择是：对应于Σ的那一侧的法线与y轴的正向的夹角为锐角时取正号，为钝角时取负号，也就是当Σ表示曲面的右侧时取正号，表示左侧时取负号。

注意：

（i）利用上述直接法计算曲面积分时，需分割曲面, 分割的原则是使在每一个部分曲面上，曲面的方程确定及其正法线方向相应的坐标轴均交锐角或交钝角。

（ii）和第二类曲线积分一样，第二类曲面积分在计算中不能直接用对称性简化，只有化为二重积分后再考虑对称性。

（iii）当Σ为垂直于 xoy 面的柱面时，$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = 0$；

当Σ为垂直于 yoz 面的柱面时，$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = 0$；

当Σ为垂直于 zox 面的柱面时，$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = 0$。

（2）合一投影法：

把 $dydz, dzdx, dxdy$ 统一成一个坐标，然后只需要一次投影。

Σ：$z = z(x,y), \vec{n} = (\mp z_x, \mp z_y, \pm 1), \vec{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),\ dydz = \mp z_x dxdy,$

$dzdx = \mp z_y dxdy$，从而：

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (\vec{F}\cdot\vec{e}_n)dS &= \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\
&= \iint_{\Sigma} \{P[x,y,z(x,y)]\cdot(\mp z_x) + Q[x,y,z(x,y)]\cdot(\mp z_y) + R[x,y,z(x,y)]\}dxdy \\
&= \pm\iint_{Dxy} \{P[x,y,z(x,y)]\cdot(-z_x) + Q[x,y,z(x,y)]\cdot(-z_y) + R[x,y,z(x,y)]\}dxdy
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\
&= \pm\iint_{D_{yz}} [P + Q\cdot(-x_y) + R\cdot(-x_z)]dydz \\
&= \pm\iint_{D_{xz}} [P\cdot(-y_x) + Q + R\cdot(-y_z)]dxdz
\end{aligned}$$

（3）利用高斯公式（详见下一章节）

8.8 两类曲面积分之间的联系

1.两类曲面积分之间的联系

设有向曲面Σ为分块光滑曲面，则两类曲面积分有如下关系：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} P(\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

其中 $cos\alpha$、$cos\beta$、$cos\gamma$ 是有向曲面Σ上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦，例如设有向曲面Σ由方程 $z = z(x, y)$ 给出，函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x, y, z)$ 在Σ上连续，且如果Σ取上侧，则上述有向曲面Σ的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}，\ \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}，\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

若P、Q、R在Σ上连续，两类曲面积分之间的联系也写成向量的点积形式，即

$$\iint_{\Sigma}\overrightarrow{A}\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}\overrightarrow{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_{\Sigma}A_n dS$$

其中$\overrightarrow{A}=\{P,Q,R\}$，$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为有向曲面$\Sigma$在点（$x$，$y$，$z$）处的单位法向量，$d\vec{S}=\vec{n}dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$称为有向曲面元，$A_n=Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma$为向量$\vec{A}$在向量$\vec{n}$上的投影 。

8.9 多元函数积分学的应用

1.多元函数积分学的应用-曲面面积

（1）第二类曲线积分可用于计算闭曲线L围成的面积：$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx.$

（2）求曲面的面积A，分别有以下公式：

（i）曲面方程 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

（ii）曲面参数方程$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v),(u,v)\in D_{uv}\\z=z(u,v)\end{cases}$

$$A=\iint_{D_{uv}}\left|(x_u\mathbf{i}+y_u\mathbf{j}+z_u\mathbf{k})\times(x_v\mathbf{i}+y_v\mathbf{j}+z_v\mathbf{k})\right|dudv=\iint_{D_{uv}}\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{matrix}\right\|dudv$$

2.多元函数积分学的应用-质心

（1）设可微曲线L的密度为$\rho(x,y)$，则曲线L的总质量$M=\int_L\rho(x,y)ds$，曲线L的重心坐标$\overline{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)ds,\overline{y}=\frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y)ds$。

（2）设有一空间薄板，占有空间上的闭区域$\sum$，在点(x,y,z)处的面密度为$\rho(x,y,z)$，假定$\rho(x,y,z)$在闭区域$\sum$上连续，则其总质量为

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$$

且质心的坐标为

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma}x\rho(x,y,z)dS,\overline{y}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma}y\rho(x,y,z)dS,\overline{z}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma}z\rho(x,y,z)dS\text{。}$$

3.多元函数积分学的应用-转动惯量

（1）设可微曲线 L 的密度为 $\rho(x,y)$，则曲线 L 对 x 轴、y 轴、坐标原点的转动惯量分别为 $I_x=\int_L y^2\rho(x,y)ds, I_y=\int_L x^2\rho(x,y)ds, I_0=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y)ds.$

（2）设有一空间薄板，占有空间上的闭区域 $\sum$，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在闭区域 $\sum$ 上连续，则各转动惯量为

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS\quad I_y=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$$

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS\quad I_o=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$$

4.多元函数积分学的应用-引力

（1）空间一物体对于物体外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位质量的质点的引力问题：

设有一物体占据空间有界闭区域 Ω，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续，则引力的大小为

$$\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,F_z)$$
$$=(\iiint_{\Omega}G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,\iiint_{\Omega}G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,\iiint_{\Omega}G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv)$$

其中 G 为引力常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 。

（2）空间曲线 L 对于曲线外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质量为 m_0 的质点的引力为：

$$\vec{F}=\int_L\frac{km\rho(x,y,z)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\,\mathrm{ds}}{r^3}$$

5.多元函数积分学的应用-功

（1）质点受力 $\overrightarrow{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 作用，沿平面曲线 L从A 移动到 B 所做的功为：

$$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

（2）质点 M 在变力 $\overrightarrow{F}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})=(P(x,\mathrm{y},\mathrm{z}),Q(x,\mathrm{y},\mathrm{z}),R(x,\mathrm{y},\mathrm{z}))$ 作用下由 A 点沿曲线 C 运

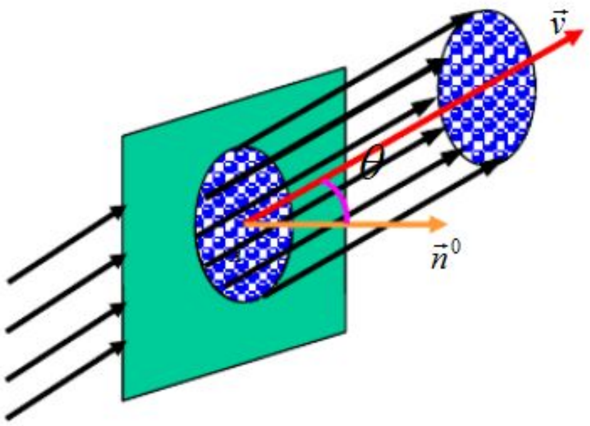
动到 B 点，则 F 对质点 M 做的功为

$$W=\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$$

6.多元函数积分学的应用-流量

（1）流速为常向量 $\vec{v}$ 的流体在空间流动，则单位时间流过定向平面上的区域的流体的体积为(即体积流量，简称流量).

$$\Phi=S\left|\vec{v}\right|\cos\theta=S\vec{v}\cdot\vec{n}^0$$



（2）设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

给出，S 是速度场中的一片有向曲面，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 都在 S 上连续，在单位时间内流向 S 指定侧的流量 Φ 为

$$\Phi=\iint_S\vec{v}\bullet\vec{n}\,dS=\iint_S Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma dS$$
$$=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

其中 $\vec{n}$ 是曲面 S 的单位向量，且 $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

（3）向量场 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 沿着有向闭曲线 Γ 的环流量为 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 。

第九章 多元函数积分学中的基本公式及其应用

9.1 平面单连通区域

1. 单连通区域

设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为平面单连通区域，否则称为复连通区域。通俗的说，平面单连通区域就是不含有“洞”（包括点“洞”）的区域，复连通区域是含有“洞”（包括点“洞”）的区域。

例如：（1）如果(二维)全平面挖掉任一条直线，就是复连通区域。

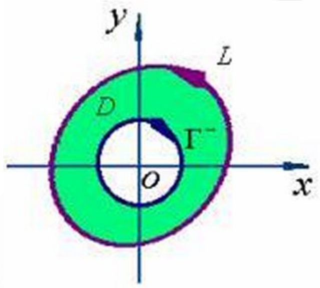
（2）如果是全平面挖掉任一个点，是复连通区域。

（3）但如果全平面挖掉任一条射线，是单连通区域。

（4）全平面挖掉 x 轴，那么 x 轴上方的区域是单连通区域（例 $x>0$ ）。

（5）全平面去掉 x 轴的下半部分，保留 x 轴，且去掉 x 轴上任意个点，剩下的部分是单连通区域。

2. 曲线的方向



对平面区域 D 的边界曲线 L，我们规定 L 的正向为当观察者沿这个方向行走时，D 内在他近处那一部分总在他的左边。

9.2 格林公式

1.格林公式定义

设闭区域 D 由分段光滑的闭曲线 L 围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy=\oint_L P\,dx+Q\,dy$，其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

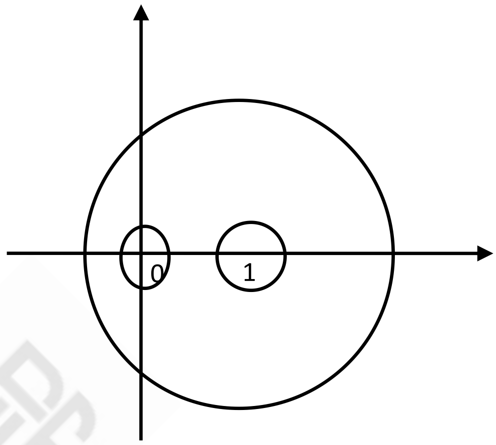
格林公式揭示了平面区域上的重积分和沿该区域边界的第二类型曲线积分之间的关系。因此，它可以看作牛顿－－莱布尼兹公式在二维空间的推广。

2.使用格林公式时的注意事项

（1）L 应是闭曲线，否则要设法补成闭曲线，再应用格林公式，然后减去所补曲线段上的曲线积分。

（2）$\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ 应在 D 上连续，否则要在间断点处用“挖洞”的方法加以处理。

［例题］计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点（1，0）为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），取逆时针方向。



解：设 $R<1$，则 $I=\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

设 $R>1$，取 $\varepsilon>0$ 充分小使椭圆 C_ε（逆时针方向）

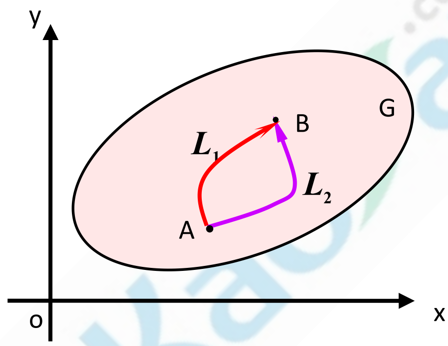
$4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 含于 L 所围区域 D 内，记 L 与 C_ε 围城区域为 D_ε，

在 D_ε 上用格林公式得

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{C_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon} xdy-ydx=\pi$$

9.3 曲线积分与路径无关

1.积分与路径无关的定义



设 G 是一个区域，$P(x,y)$ 以及 $Q(x,y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数，如果对于 G 内任意指定的两个点 A，B，以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1, L_2，等式

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

恒成立，就说曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关，否则与路径有关。

2.积分与路径无关的条件

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通平面区域 D 上有一阶连续偏导数，则下面四个命题是等价的：

（1）$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径 L 无关，其中 L 为 D 内任意一条闭曲线；

（2）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$；

（3）$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,L$ 为 D 内任意闭曲线

（4）在 D 内存在单值函数 $u(x,y)$，使得 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，故有

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$
$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y\ )dx$$

即 $u(x,y)$ 作为 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 的原函数。

注意： （1）判定在单连通域 D 内曲线积分与路径无关的充要条件中，最易验证的是：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$；若验证出曲线积分与路径无关，可通过改变积分路径来简化曲线积分的计算，这是一种很有用的技巧。

（2）当 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 时，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程，其通解为 $u(x,y)=C$.

例1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b) 终点为 (c,d)，记 $I=\int_L \dfrac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]dx+\dfrac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$

(1) 证明曲线积分与路径 L 无关；
(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

答案：$\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$

9.4 高斯公式（对坐标的曲面积分与三重积分的关系）

1.高斯公式的定义

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧.

2. 运用高斯公式时的注意事项

（1）运用高斯公式时，应注意Σ是区域Ω的边界曲面外侧，若是封闭的内侧曲面，应注意三重积分前加负号；

（2）要考查P,Q,R在Ω内具有一阶连续偏导数，否则不能用高斯公式；

（3）当积分曲面Σ不封闭时，也类似于格林公式，可对Σ作封闭化处理。

例1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy,\Sigma:z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$为介于$z=0,z=2$之间部分的下侧.

答案：8π

9.5 斯托克斯公式(空间曲线积分与曲面积分的关系)

1. 斯托克斯公式

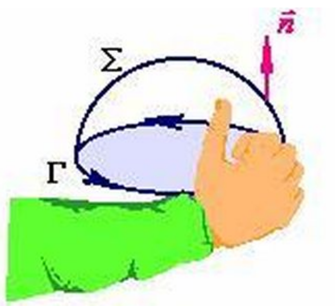
设Γ是分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向和Σ的正侧满足右手规则，函数P,Q,R在包含曲面Σ的空间区域内具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

其中$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲面$\Sigma$的单位法向量。

斯托克斯公式是格林公式在空间的推广，它将定向曲面上的曲面积分与曲面的定向边界线的线积分联系起来。



Γ 的正向规定如下：
当右手除拇指外的四指依Γ的正向绕行时，大拇指所指的方向与Σ上的法向量的指向相同。

9.6 向量场的通量与散度

1.向量场的通量

设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，则 $\vec{F}$ 沿分块光滑定向曲面 S 的通量为

$$\iint_S \vec{F}\bullet\vec{n}dS=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S}$$

其中 $\vec{n}$ 是 S 上任一点处的单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

2. 向量场的散度：

设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，函数 P,Q,R 在包含曲面 Ω 的空间区域内具有一阶连续偏导数，则

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\triangleq\nabla\bullet\vec{F}$$，其中 $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ 为梯度算符。

$div\vec{F}(M)$ 表示不可压缩流体的流速场 $\vec{F}$ 在点 M 处的源头强度，一个散度处处为零的向量场称为无源场。

3. 向量场的通量和散度的关系：

高斯公式表述了向量场的散度和通量之间的关系：

$$\iiint_\Omega div\vec{F}dV=\iint_S \vec{F}\bullet\vec{n}dS$$

故而此时高斯公式的物理含义：单位时间内 Ω 中所产生流体的总质量等于流体通过 Ω 的边界流向外侧的总质量。

9.7 向量场的环流量与旋度

1. 向量场的环流量：

设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，则 $\vec{F}$ 沿分段光滑定向闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_\Gamma \vec{F}\bullet\vec{\tau}ds=\oint_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma \vec{F}\bullet d\vec{s}$$

2. 向量场的旋度：

设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，函数 P,Q,R 在包含曲面 Ω 的空间区域内具有一阶连续偏导数，则

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$$

一个旋度处处为零向量的向量场称为无旋场。

3. 向量场的环流量和旋度的关系：

斯托克斯公式表述了向量场的旋度和环流量之间的关系：

$$\iint_S rot\vec{F}\bullet\vec{n}dS=\int_\Gamma\vec{F}\bullet\vec{\tau}ds$$

其中 $\vec{\tau}$ 是曲线 Γ 沿它的方向的单位切向量。

第十章　无穷级数

10.1 常数项级数

1.常数项级数的基本概念：

（1）常数项级数的概念

设给定一个数列$u_1,u_2,u_3,\dots,u_n,\dots$,则和式

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

称为（常数项）无穷级数，简称为（常数项）级数，简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

其中第n项u_n称为级数的一般项或者通项。

（2）常数项级数的部分和数列

（常数项）级数的前n项和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

称为级数的前n项部分和。当n依次取 1，2，3，...时，部分和

$$S_1,S_2,S_3,\dots,S_n\dots$$

构成一个新的数列$\{S_n\}$，数列$\{S_n\}$也称为部分和数列

2.常数项级数的收敛

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，称 S 是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和，即

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

如果部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

3.收敛级数的基本性质：

（1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，它们的和分别为S和σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$也收敛，且其和为$S \pm \sigma$。

（2）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且其和为S，则它的每一项都乘以一个不为零的常数k，所得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为kS。

（3）在一个级数前面加上（或去掉）有限项，级数的敛散性不变。

（4）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则将这个级数的项任意加括号后，所成的新级数$(u_1+u_2+\dots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\dots+u_{n_2})+\dots+(u_{n_{k-1}}+\dots+u_{n_k})+\dots$也收敛，且与原级数有相同的和。

（5）（级数收敛的必要条件）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

4.两个重要的级数：

（1）几何级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots. (a \neq 0)$$

若$|q|<1$,级数收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$，若$|q|\geq 1$,级数发散。

（2）p 级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (p>0)$$

若$p>1$，级数收敛；若$p\leq 1$，级数发散；当$p=1$时，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

例 1. 设$a_n>0, n=1,2,\cdots$,若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，则下列说法正确的是( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$发散　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$收敛

答案：D

10.2 常数项级数的审敛法

1. 正项级数及其审敛法

对一切自然数 n,都有$u_n \geq 0$，称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数。正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{S_n\}$有界。

正项级数的审敛法有如下几种：

（1）比较审敛法：设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \leq v_n$（n=1,2,…）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

（2）比较审敛法的极限形式：若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l.(0<l<+\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。

$l=0$时，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

$l=+\infty$时，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

（3）比值审敛法：若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则若$\rho<1$,级数收敛；若$\rho>1$ (包括$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)，级数发散；当$\rho=1$时，级数可能收敛，也可能发散。

(4) 根值审敛法：若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$，则若$\rho<1$,级数收敛；若$\rho>1$ (包括$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$)，级数发散；当$\rho=1$时，级数可能收敛，也可能发散。

例 1.判断下列级数的敛散性

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$　　$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\sqrt{\pi}}{n}\right)$

答案：（1）收敛（2）收敛

2. 交错级数及其审敛法

交错级数：一个级数如果它的各项是正负交错的则称为交错级数。
交错级数的审敛法通常利用莱布尼茨定理。

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若满足条件

（1)对一切 N 有 $u_{n+1}\le u_n$；

（2） $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $s\le u_1$.，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\le u_{n+1}$。

例 2 判定下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$；（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$

3. 绝对收敛与条件收敛

（1）绝对收敛与条件收敛定义：

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

（2）绝对收敛的性质

绝对收敛的级数一定收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

推论：一个绝对收敛级数的正数项与负数项所组成的级数都是收敛的；
　　　一个条件收敛级数的正数项与负数项所组成的级数都是发散的。

例 3. 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,$若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，常数$\lambda\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ ( )

(A)绝对收敛　(B)条件收敛
(C)发散　(D)收敛性与λ有关

答案：A

例 4. 设常数$\lambda>0$,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$( )

(A)发散　　　　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　　(D)收敛性与λ有关

答案：C

10.3 函数项级数与幂级数

1. 函数项级数的相关概念

（1）函数项级数定义

如果$u_n(x)(n=1,2,3,...)$是定义在某个区间I上的函数，则称函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

为区间I上的函数项无穷级数，简称为（函数项）级数。

（2）函数项级数与常数项级数关系

对于每个确定的值$x_0\in I$，函数项级数就变为常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x_0)+...$$

（3）函数项级数和函数

在收敛域上，函数项级数的和是x的函数$S(x)$，通常称$S(x)$为函数项级数的和函数，这个函数的定义域就是级数的收敛域，并写成

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

在收敛域上，部分和满足$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$。

2. 幂函数及其收敛性

（1）幂级数定义：

形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$的级数称为$(x-x_0)$的幂级数，其中$a_0,a_1,a_2,...,a_n,...$均为常数，称为幂级数的系数。

当 $x_0=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ 称为 x 的幂级数

（2）幂级数收敛性判断：

对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ 的幂级数

若设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l\cdot|x|$$

根据任意项级数判别法可知：

（i）当 $l\neq0$ 时，

若 $l\bullet|x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{l}=R$，该幂级数绝对收敛；

若 $l\bullet|x|>1$，即 $|x|>\frac{1}{l}=R$，该幂级数发散；

若 $l\bullet|x|=1$，即 $|x|=\frac{1}{l}=R$，则比值判别法失效，该幂级数可能收敛也可能发散。

（ii）当 $l=0$，由于 $l\bullet|x|=0<1$，该幂级数对任何 x 都收敛，此时定义 $R=+\infty$.

（3）幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域

(i)定义：对任意一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，都存在一个 R，$0\le R\le+\infty$，使对一切 $|x|<R$ 都有级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，而当 $|x|>R$ 时级数发散。称 R 为该幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 为收敛区间。

当幂级数只在 $x=0$ 一点收敛时，$R=0$；当对一切 x 幂级数都收敛时 $R=+\infty$。

再由幂级数在 $x=\pm R$ 的收敛性就可以决定它的收敛域是 $(-R,R)$，$[-R,R)$，$(-R,R]$，$[-R,R]$ 这四个区间之一。

(ii)收敛半径求法：

对任意一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$，则当 ρ 为非零正数时，收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$；

当 $\rho=0$ 时，收敛半径 $R=+\infty$；当 $\rho=+\infty$ 时，收敛半径 $R=0$。

3.阿贝尔定理：

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时收敛，则适合不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$使幂级数绝对收敛。反之，如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时发散，则适合不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$使这幂级数发散。

推论：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数R存在，使得

若$|x| < R$，该幂级数绝对收敛；

若$|x| > R$，该幂级数发散；

若$|x| = R$，该幂级数可能收敛也可能发散。

4.幂级数的性质：

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别是$R_1$与$R_2$（$R_1$与$R_2$均不为 0），它们的和函数分别为$S_1(x)$与$S_2(x)$

（1）（加法与减法运算）

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = S_1(x) \pm S_2(x)$$

所得的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$仍收敛，且收敛半径是$R_1$与$R_2$中较小的一个。

（2）（乘法运算）

$$\begin{aligned}
&(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n + \ldots \\
&= S_1(x) \cdot S_2(x)
\end{aligned}$$

两幂级数相乘所得的幂级数仍收敛，且收敛半径是R_1与R_2中较小的一个。

（3）（微分运算）

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R$，则在$(-R, R)$内和函数$S(x)$可导，且有

$$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

且求导后所得的幂级数的收敛半径仍为 R。

（4）（积分运算）

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R，则和函数 $S(x)$ 在该区间内可积，且有

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且求导后所得的幂级数仍收敛，且收敛半径仍为 R。

例 1.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=2$ 发散，则该幂级数收敛域为（）

答案:$[0,2)$.

例 2.求下列幂级数的和函数

$(1)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$　　　$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$

答案：$(1)\frac{1}{(1-x)^2},|x|<1;(2)-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1,|x|<1$

5. 函数展成幂级数

若找到一个幂级数，保证在某区域内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内能够展开成幂级数。

（1）函数展开成泰勒级数或麦克劳林级数

$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近有任意阶导数，称幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**，并称 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$（$n=0,1,2,\cdots$）为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒系数，特别地，当 $x_0=0$ 时，称幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**，并称 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 为 $f(x)$ 的麦克劳林系数。

（2）函数展开成泰勒级数的充分必要条件：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, x\in U(x_0)$$

（3）几个常见的麦克劳林展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\bullet x^n, x\in(-1,1)$$

(4)求函数幂级数展开式的方法：

(i)直接展开法　求各阶导数，代入泰勒级数并检查泰勒余项 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$ 的区间。

(ii)间接展开法　利用函数与已知幂级数展开式的函数之间关系及其在收敛区间的性质求得。

例 3.将下列函数展开为 x 的幂级数

$$(1)\ y=\arctan x;\quad (2)\ y=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$$

答案：$(1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-1,1)$　　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n, x\in(-1,1)$

10.4 傅里叶级数

1. 傅里叶级数的概念

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，或在 $[-l,l]$ 可积，在三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

中，若 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$；$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n=1,2,\cdots)$，则称为 $f(x)$ 的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

并且 a_n,b_n 称为傅里叶系数。

2.傅里叶级数的收敛定理：

$f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上满足

（1）连续，或只有有限个间断点，且都是第一类间断点。

（2）在一个周期内至多有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,+l]$ 上的傅里叶级数收敛，而且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$=\begin{cases} f(x) & 若x\in(-l,l),且为f(x)的连续点 \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] & 若x\in(-l,l),且为f(x)的第一类间断点 \\ \frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)] & 若x=\pm l \end{cases}$$

3.周期与非周期函数的傅里叶级数

上边所说的是以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数，特殊情形是 $l=\pi$，而对于非周期函数，比如 $f(x)$ 只在 $[-l,l]$ 上有定义，则可以进行周期延拓；而对于只在 $[0,l]$ 上有定义的函数，则可以进行奇延拓或者偶延拓，然后再做周期延拓。

（1）奇函数的傅里叶级数：

$f(-x)=-f(x)$，其傅里叶级数为正弦级数，即 a_n =0，

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}，\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

（2）偶函数的傅里叶级数：

$f(-x)=f(x)$，其傅里叶级数为余弦级数，即 b_n =0，

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}，\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

例 1. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}, S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$ ，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx, n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于（）

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$

答案：C