南京理工大学

2014年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　　　科目名称：高等代数　　　　满分：150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一. 填空题（每题4分，共40分）

(1) 在一个n阶行列式中等于零的元素如果比n^2-n还多，那么此行列式等于________.

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{n}\\ -\frac{\alpha}{n} & 1\end{pmatrix}^n=$ ________.

(3) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-x_1x_3+2x_2^2+3x_2x_3$ 的秩为________.

(4) 使线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}$$

有解的参数 a,b 取值为________.

(5) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是多项式 $f(x)=x^3+x^2+x+2$ 的根，$g(x)=x^2+x+1$. 以 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_3)$ 为根的三次有理系数多项式为________.

(6) 满足条件 $A^2=A$ 的矩阵称为幂等矩阵，两个幂等矩阵 A,B 之和仍为幂等矩阵的条件为________.

(7) 设 $A\in R^{n\times n}$, $A\neq 0$, 存在一个非零矩阵 $B\in R^{n\times n}$ 使 $AB=0$ 的充分必要条件是________.

(8) 在 R^4 中与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 正交的单位向量为________.

(9) 已知 $f(x,y)$ 是线性空间 V 上的双线性函数，若 $f(\xi,\eta)=5$ $(\xi,\eta\in V)$，则 $f(-\xi,-\eta)=$________.

(10) 行列式 $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$ =________.

二. (20分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$. 证明:

(1) 如果 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 A 的行列式 $|A|\neq 0$.

(2) 如果 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 A 的行列式 $|A|>0$.

三. (20分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

记 $S(A)=\{B\in R^{3\times 3}: AB=0\}$, $F(A)=\{f(A): f(x)$为实系数多项式$\}$.

(1) 求 $S(A)$ 的一组基和维数.

(2) 分别求 $F(A)\cap S(A)$, $F(A)+S(A)$ 的维数和一组基.

四. (10分) 试求集合 $M=\{A\in R^{2\times 2}: A^3=I$ (单位矩阵)$\}$.

五. (15分) 试证欧氏空间中两个向量 α,β 正交的充分必要条件是：对任意实数 t 都有 $|\alpha+t\beta|\geq|\alpha|$.

六. (20分) 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，σ_1,σ_2 是 V 的线性变换，且 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$. 证明:

(1) 如果 λ_0 是 σ_1 的一个特征值，V_{λ_0} 是相应特征子空间，那么 V_{λ_0} 是 σ_2 的不变子空间.

(2) 线性变换 σ_1 与 σ_2 至少有一个公共的特征向量.

七. (10分) 用合同变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+2x_3^2$ 化为标准形.

八. (15分) 设 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求一正交矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角矩阵.