南京理工大学

2015年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：615　　科目名称：高等数学　　满分：150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在$\boxed{\text{答题纸}}$上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一. 选择题（1-8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.）

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的　　（ ）

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 不能判别连续的点

(2) 设函数 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$　　（ ）

(A) xzf_{22}''　　(B) $xf_{12}''+xzf_{22}''$

(C) $f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$　　(D) $f_2'+xf_{11}''+(x+y)f_{12}''+xzf_{22}''$

(3) 下列命题成立的是　　（ ）

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在但不是 ∞

(C) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无界变量

(D) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷大，也是无界变量

(4) 积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{\sin 3x}{3+\cos 3x}+\ln(1-x)\right]dx=$　　（ ）

(A) $\dfrac{3}{2}\ln 3-\ln 2-1$　　(B) $\dfrac{2}{3}\ln 2-\ln 3-1$

(C) $\dfrac{2}{3}\ln 3-\ln 2-1$　　(D) $\dfrac{3}{2}\ln 2-\ln 3-1$

(5) 设三阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1=e^x, y_2=2xe^x, y_3=3e^{2x}$，则微分方程为（ ）

(A) $y'''-5y''-4y'+3y=0$　　(B) $y'''+5y''-4y'-3y=0$

(C) $y'''-4y''+5y'-2y=0$　　(D) $y'''-4y''-5y'+2y=0$

(6) 不定积分 $\int\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=$　　（ ）

(A) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|+c$　　(B) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+c$

(C) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}\ln|\sin x+\cos x|+c$　　(D) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}\ln|\sin x-\cos x|+c$

(7) 设 $y=f(x)$ 二阶连续可导，$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{(x-3)^3}=-3$，则下列命题正确的是（ ）

(A) $(3,f(3))$ 是 $y=f(x)$ 拐点

(B) $f(3)$ 是 $y=f(x)$ 的极小值

(C) $f(3)$ 是 $y=f(x)$ 的极大值

(D) $(3,f(3))$ 不是 $y=f(x)$ 拐点，$f(3)$ 也不是 $y=f(x)$ 的极值

(8) 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，$(n=1,2,\cdots,a_n>0,b_n>0)$ 则下列命题正确的是　　（ ）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛　　(D) 无法判别

二. 填空题（9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

(9) 设函数 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan x$ ，则 $dy|_{x=2}=$______

(10) $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数，当 $-\pi\le x<\pi$ 时，$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$，设其傅里叶级数的和函数为 $S(x)$ ，则 $S(11\pi)=$______

(11) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ ，计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=$______

(12) 设 L 为曲线 $|x|+|y|=1$ 的逆时针，则 $\oint_L\frac{(x-3y)dx+(3x+4y)dy}{x^2+4y^2}=$______

(13) 设 a,b 为非零向量，且 $|b|=3,\left(\widehat{a,b}\right)=\frac{\pi}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|a+xb|-|a|}{x}=$______

(14) 直线 $\begin{cases}x+2y-3z=2\\2x-y+z=3\end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上的投影直线为______

三. 解答题（15-22 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)$.

(16) （本题满分 10 分）

已知 $xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}=0$，且 $f(0+0)=1$，求 $f(x)$.

(17) （本题满分 10 分）

求函数的 $f(x)=\frac{1}{1-x+x^2}$ 的 7 阶佩亚诺型麦克劳林公式， 并求 $f^{(7)}(0)$.

(18) （本题满分 10 分）

球 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与球 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le 2Rz\ (R>0)$ 的公共部分体积为 $\frac{5\pi}{12}$，求 R 的值.

(19) （本题满分 12 分）

求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+2}{3^n}$ 的和.

(20) （本题满分 14 分）

设平面 $\pi: x+2y+2z=8$，锥面 $S: z=\sqrt{x^2+4y^2+4}$，求 S 到 π 距离最短的点及最短距离.

(21) （本题满分 14 分）

求曲线 $l: |\ln x|+|\ln y|=1$ 围成的平面图形面积.

(22) （本题满分 14 分）

证明不等式：$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.