南京理工大学

2015 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　　科目名称：数学分析　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1. 计算题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty} n^2(1-n\sin\frac{1}{n})$。

(2) 设 $z=f(x+y,xy,\frac{x}{y})$， 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

(3) 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数。

(4) 计算 $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 C 为逆时针曲线 $x^2+y^2=a^2$。

(5) 计算 $\iint_S \frac{dS}{z}$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 所截的顶部。

2. 证明：$f(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充要条件是：对 I 上任意二数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$，只要 $x_n-x'_n\to 0$, 就有 $f(x_n)\to f(x'_n)$， $(n\to\infty)$. (10分)

3. 将周期为 2π 的函数

$$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x),\quad x\in[0,2\pi]$$

展开成傅里叶 (Fourier)级数， 并由此求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。　　(15分)

4. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在， 但在该点不可微。　　(15分)

5. 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx,\quad (p>0,b>a).\qquad (10分)$$

6. 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围立体的体积。　　(15分)

7. 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(x>0,y>0,z>0,r>0)$ 下的极小值， 并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\leq\sqrt[3]{3abc},$$

其中 a,b,c 为任意正实数。　　(15分)

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$上具有二阶导数， 且 $|f''(x)|\leq M$, f 在 $(0,a)$ 上取得最大值。证明

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma.\qquad (15分)$$

9. 设 G 是由光滑闭曲线 C 围成的区域， 函数 $u=u(x,y)$ 在 $G+C$ 有直到二阶的连续偏导数，证明

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint_G u\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]dxdy+\int_C u\frac{du}{d\mathbf{n}}ds,$$

其中 $\frac{du}{d\mathbf{n}}=D_{\mathbf{n}}u$ 是 $u=u(x,y)$ 沿 C 的外法线方向 $\mathbf{n}$ 的导数。　　(15分)