南京理工大学

2015年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、 填空选择题（每题5分，共30分）：

1、如果 $x-1$ 整除 $f(x^n)$，那么 x^n-1__________(填能或者不能) 整除 $f(x^n)$。

2、由行列式定义的多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 4 & 2 \\ 9 & x^2 & 16 & 4 \\ 27 & x^3 & 64 & 8 \end{vmatrix}$ 中 x^2 的系数为__________。

3、已知三阶方阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T+\gamma\gamma^T$，其中 α,β,γ 为三维欧氏空间的一组标准正交基，则 $A=$__________。

4、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则下列矩阵 B,C,D 中与 A 合同但不相似的是__________。

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 B 为 3×4 阶非零矩阵，满足 $AB=0$，则 $rank(B)=$__________。

6、设三维线性空间 V 上的一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，则它在另一组基 $\varepsilon_2,\varepsilon_1,-\varepsilon_3$ 下的矩阵为__________。

二、(15分) 计算n阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$。

三、(10分) 求 $g(x)=2x+3$ 除 $f(x)=4x^4-10x^2-x+1$ 的商和余式。

四、(15分) 设 n 阶方阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$。请证明：$A-E$ 为可逆矩阵，且 $AB=BA$（其中 E 为 n 阶单位矩阵）。

五、线性方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1 \\ x_1+(a-2)x_3-x_4=b \\ 2x_1+x_2+(a-1)x_4=-1 \end{cases}$。

(1)（5分）当 a,b 为何值时，线性方程组有唯一解？

(2)（15分）当 a,b 为何值时，线性方程组有无穷多个解？求此时的通解。

六、(15分) 欧氏空间 V 中的线性变换A称为**反对称的**，如果对任意的 α，$\beta\in V$，

$$(\mathrm{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathrm{A}\beta).$$

请证明：若 W 是反对称线性变换A的不变子空间，则它的正交补 $W^\perp$ 也是。

七、(10分) 证明：正定矩阵 A 的任意主子式（行指标和列指标相同的子式）都大于零。

八、(20分) 请用正交线性变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为标准型，并写出正交变换矩阵。

九、设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 上的一组基，f_1,f_2,f_3 是它的对偶基。

(1)（5分）请证明：$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_3$ 是 V 上的一组基；

(2)（10分）请求出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基（用 f_1,f_2,f_3 表示）。