

安徽师范大学

2018年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 724

科目名称: 高等数学 II

一、单项选择题 (每小题3分, 共21分):

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是 ()

A. $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

B. $(-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$

C. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

D. $(-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, +\infty)$

2. 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin ax}{2x} = \frac{2}{3}$, 则 $a =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{9}{4}$

3. 点 $x=0$ 是下列哪个函数的可去间断点 ()

A. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

B. $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$

C. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

D. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

4. 设 $f(x)$ 二阶可导, $y = f(\ln x)$, 则 $y'' =$ ()

A. $f''(\ln x)$

B. $f''(\ln x) \frac{1}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2} [f''(\ln x) + f'(\ln x)]$

D. $\frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)]$

5. 曲线 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 的渐近线有 ()

A. 4条

B. 3条

C. 2条

D. 1条

6. 若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ ()

A. $x \cos x - \sin x + C$

B. $x \sin x - \cos x + C$

C. $x \cos x + \sin x + C$

D. $x \sin x + \cos x + C$

7. 设函数 $y = \int_0^x (t-1)dt$, 则 y 有 ()

- A. 极小值 $-\frac{1}{2}$ B. 极小值 $\frac{1}{2}$ C. 极大值 $-\frac{1}{2}$ D. 极大值 $\frac{1}{2}$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 21 分):

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设函数 $y = \frac{1}{x}$, 则 $y^{(2017)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x-1)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式

$\underline{\hspace{20cm}}$

6. 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 当 k $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛.

三、解答题 (每小题 10 分, 共 80 分):

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{\arcsin x^3}$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$.

3. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 求函数 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 7$ 的单调区间和凹、凸区间.

5. 求 $\int \frac{3}{x^3+1} dx$.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & -1 < x < 0, \\ xe^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

7. 求由曲线 $y = \ln x$, x 轴与直线 $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ 所围成的图形的面积.

8. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

四、证明题 (每小题 7 分, 共 28 分):

1. 已知 $y = y(x) = e^{f^2(x)}$, 若 $f'(a) = \frac{1}{2f(a)}$, 证明 $y(a) = y'(a)$.

2. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 证明

$$\int_a^{a+l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx.$$

3. 证明当 $x > 0$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 1$.