机密★启用前

四川理工学院 2019 年研究生招生考试业务课试卷

（满分：150 分，所有答案一律写在答题纸上）

适用专业：0701 数学

考试科目：808 高等代数 A 卷

考试时间：3 小时

一、填空题（每空 6 分，共 36 分．答案请写在答题纸上，写在试卷上无效.）

1、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=$__________.

（其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式）

2、若可逆矩阵 A 的每一行元素之和均为 m，那么的 A^{-1} 第一行元素之和为__________.

3、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2018}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2019}=$__________.

4、三阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+B$，则 $(A-E)^{-1}=$__________.

5、设 σ 为线性空间 V 上的线性变换，请举出一个 $\sigma-$ 子空间的例子__________.

6、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$，

则 a 满足____________________时，二次型是正定的.

二、计算题（第 1、4 题 14 分，第 2 题 12 分，第 3、5 题 16 分，共 72 分.）

1、设 A 为 3 阶方阵，若 3 维列向量 X 使得 X, AX, A^2X 线性无关，且 $A^3X=3AX-2A^2X$.

(1) 记 $P=(X, AX, A^2X)$，试求 3 阶方阵 B，使得 $A=PBP^{-1}$；

(2) 计算 $|A-E|$.

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一组基，这组基的度量矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

求 V 的一组标准正交基.

3、已知三元非齐次组系数矩阵的秩为 1，且三个解向量满足

$X_1+X_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$X_2+X_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$，$X_1+X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，求该非齐次组的通解，

并找出一个满足条件的方程组.

4、设 σ 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换，$\forall\alpha=(x,y,z)\in R^3$，

$$\sigma(\alpha)=\sigma(x,y,z)=(2y+z,-2x+3z,-x-3y),$$

求 σ 的特征根与特征向量.

5、（1）证明下列多项式是 $P[x]_n$（即次数小于等于 $n-1$ 的多项式及零多项式构成的线性空间）的基：

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\ \ i=1,2,\cdots,n$$

其中，$a_i \in P$ 是 n 个互不相同的数；

(2)在(1)中，取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为全体 n 次单位根，求由基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵.

三、证明题（每题14分，共42分.）

1、设 $(f(x), g(x)) = 1$，σ 为 n 维向量空间 V 上的线性变换，证明：$V = V_1 \oplus V_2$，其中 $f(\sigma)v_1 = 0$，$g(\sigma)v_2 = 0$（$v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$），符号“$\oplus$”表示直和.

2、已知 A 为 $m \times k$ 矩阵，B 为 $k \times n$ 矩阵，则 $r(A) + r(B) - k \le r(AB)$. 特别地：若 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \le k$.

3. 设 A 为实对称阵，λ 为最大的特征根，试证：$\lambda = \max\limits_{\|u\|=1} (Au, u)$，其中 $u \in \mathbb{R}^n$，$\|u\|$ 表示 u 的长度，(Au, u) 为内积.