

江苏大学
硕士研究生入学考试样题

科目代码: 603

A卷

科目名称 高等数学

满分: 150分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1、已知 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin 2x$ 与 $\frac{ax}{\cos^2 x}$ 是等价无穷小量, 确定 $a =$ _____

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2})^n =$ _____

3、 $\int x^2 \cos x dx =$ _____

4、曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $0 \leq x \leq 1$ 的一段弧的长度为 _____

5、设函数 $f(\frac{x}{2}) = \sin x$, 则 $f'[f(x)] =$ _____

6、若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln x + 2017$, 则 $f'(x) =$ _____

二、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、计算定积分 $\int_2^3 \min\{|x|, x^2\} dx$.

2、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$.

3、求微分方程 $x^2 y' + xy = 1$, $y(1) = 0$ 的特解.

4、设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 2 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{3x} = 1$, 求曲线

$y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线斜率.

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、证明当 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.

2、证明反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{2017}}$ 收敛.

3、设 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ ($x > 0$), 证明 $f(x) \equiv \frac{\pi}{2}$.

4、已知一抛物线通过 x 轴上两点 $A(1,0), B(3,0)$, 试证: 两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积.

四、(14分) 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 求出间断点并判别其类型.

五、(14分) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有三阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 设 $F(x) = x^3 f(x)$, 试证: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F'''(\xi) = 0$.

六、(12分) 假设在某次试验中, 对某个物理量共进行了 n 次观测, 得到的数据是

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

试问用怎样的数值 \bar{a} 代表要测量的真值, 才能使它与上面各数据的误差平方和

$$(\bar{a} - a_1)^2 + (\bar{a} - a_2)^2 + \dots + (\bar{a} - a_n)^2 \text{ 为最小.}$$