江苏大学
硕士研究生入学考试样题

科目代码：853　　　　　　　　　　　　　　　　　　**A卷**

科目名称　高等代数　　　　　　　　　　　　满分：150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一.（10分）计算下列行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

二.（20分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，求 A 的所有不变因子，初等因子，若当标准形及最小多项式。

三.（20分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并计算：A^3+3A^2+4A+E.

四.（20分）设 η_0 是非齐次线性方程组的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它导出组的一个基础解系，$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$，证明：

（1）$\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性无关；（2）$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{t+1}$ 线性无关；

（3）该方程组的任一解 γ 都可表示成：

$$\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1}，其中 \sum_{i=1}^{t+1}u_i=1。$$

五. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B,C 均为 $n\times m$ 矩阵，其中 A 为列满秩矩阵即：秩 $A=n$，

证明：（1）存在 s 级可逆矩阵 P，使 $PA=\begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix}$。

（2）若 $AB=AC$，则：$B=C$.

（20分）

六. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基，

$$W_1=L(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),\quad W_2=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \,\middle|\, k_i\in P,\sum_{i=1}^{n}k_i=0\right\}$$

证明：（1）W_2 是 V 的子空间；（2）$V=W_1\oplus W_2$ （20分）

七. 设 A,B 是实对称矩阵且 B 为正定矩阵，证明：存在可逆阵 P，使 $P^T AP$ 与 $P^T BP$ 同时化为对角阵。

（20分）

八. 设 V 是数域 P 上 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换，满足：$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，

矩阵 A 是 $\mathscr{A}$ 在 V 的某基下的矩阵，证明：

（1）$\mathscr{A}+\mathscr{E}$ 是 V 的可逆变换（$\mathscr{E}$ 是 V 的恒等变换）；

（2）秩 $\mathscr{A}$ =tr A（trA 即 A 的对角线元素之和）。（20分）