江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A卷

科目代码： 602

科目名称： 线性代数

满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空选择题（3*10=30 分）

1. n阶行列式中，副对角线上元素的乘积$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$在行列式中的符号为______.

2. 设3阶实对称方阵A的特征值为1,1,10，C为一正交矩阵，则$|C|=$______，$|C^TAC|=$______，$R(C^TAC)=$______.

3. 当 t 满足______时，二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$正定.

4.线性方程组$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0$的基础解系含有解向量的个数为(　　).

（A）1个　　（B）2个

（C）3个　　（D）4个

5.若α_1，α_2线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则向量组$\alpha_1$，$2\alpha_2$，$3\alpha_3$的极大无关组为(　　).

（A）α_1，$2\alpha_2$　　（B）α_1，α_2

（C）α_2，α_3　　（D）$2\alpha_2$，$3\alpha_3$

6.设n阶方阵A满足$A^2-A-2E=0$，则必有（　　）.

（A）$A=2E$　　（B）$A=-E$

（C）$A-E$可逆　　（D）A不可逆

7. A是n阶正定矩阵的充分必要条件是（　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}|>0$　　（B）存在n阶矩阵C，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$

（C）负惯性指标为零　　（D）各阶顺序主子式均为正数

8. 对于n阶方阵A与B存在正交矩阵P使得$P^{-1}AP=B$，则（　　）.

（A）$A=B$　　（B）A与B合同

（C）A与B有相同的特征向量　　（D）$|A|\neq|B|$

二、（15分）计算下列行列式（第一题7分，第二题8分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

三、（15分）设$X\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，求$X$.

四、（15分）设向量组$\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(1,3,3,5)^T,\alpha_3=(1,-1,1,1)^T$,

$\alpha_4=(4,-2,5,6)^T$，$\alpha_5=(-3,-1,-5,-7)^T$，试求它的秩及一个极大无关组，并把其余的向量用该极大无关组线性表示.

五、（15分）讨论a,b取何值时，下列方程组无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=a \\ 2x_1+3x_2-x_3+bx_4=-6 \end{cases}$

六、（15分）已知三阶方阵A的特征值分别为1, 2, 3，对应的特征向量依次为

$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求$A$及$A^{100}$.

七、（15分）求一个正交变换$X=PY$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$为标准形.

八、（10 分）设向量$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$为向量空间$V$的一组基，

求向量$\eta=\begin{pmatrix}8\\10\\2\\-1\end{pmatrix}$在该基下的坐标.

九、（10 分）在向量空间V中，已知由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵为

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&2&4\end{pmatrix}$，且$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$.

十、（10 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3$,

$\beta_3=3\alpha_3+4\alpha_1$试证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.