江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A卷

科目代码：853　　　　满分：150 分

科目名称：高等代数

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一（15分）设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

求：（1）A 的不变因子、初等因子；

（2）A 的 Jordan 标准形。

二（15分）计算 $n(n\geq 2)$ 阶行列式：$\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & x \\ a & a & \cdots & x & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a \\ x & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$。

三（20分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩是 n，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_n+\alpha_1$，

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价 $\Leftrightarrow$ n 为奇数；

(2) 当 n 为偶数时，求秩 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$。

四（20分）一个矩阵 A 称为反对称的如果 $A^T=-A$。证明任何一个 n 阶矩阵都可以唯一地表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和。

五（20分）若 A 和 B 都为正定矩阵，证明：

(1) 方程 $|xA-B|=0$ 的所有根都大于 0；

(2) 方程 $|xA-B|=0$ 的所有根都为 1 当且仅当 $A=B$。

六（20分）设 U 和 V 是线性空间 W 的两个子空间。判断下面三个命题是否成立。如果成立，请给出证明。如果不成立，请给出反例。

(1) U 和 V 的交 $U\bigcap V=\{\alpha\mid\alpha\in U\text{且}\alpha\in V\}$ 一定是 W 的子空间；

(2) U 和 V 的并 $U\bigcup V=\{\alpha\mid\alpha\in U\text{或}\alpha\in V\}$ 一定是 W 的子空间；

(3) U 和 V 的和 $U+V=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in U,\ \alpha_2\in V\}$ 一定是 W 的子空间。

七（20 分）设 A 是数域 P 上的 n 阶方阵，又设向量空间 P^n 的两个子空间为

$$W_1=\{x\mid(A-E)x=0\},\quad W_2=\{x\mid(A+E)x=0\},$$

其中 E 为单位矩阵。证明： $P^n=W_1\oplus W_2$（即 P^n 表示为 W_1 和 W_2 的直和）的充分必要条件是 $A^2=E$ 。

八（20 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上的线性空间 V 的一组基， ϕ 是 V 的一个线性变换。证明：ϕ 可逆的充分必要条件是 $\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_n)$ 线性无关。