★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

一、填空题（每小题 6 分，共 60 分）

1、已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&-1\\-2&-1&0&3\\3&1&2&-5\end{vmatrix}$，则行列式 D 的第四行元素的代数余子式

之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ ______ ；

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则矩阵 A^* 的逆阵为 ______ ；

3、设 $n\ (n\geq 3)$ 阶方阵 A 的行列式 $|A|=7$，A 的伴随矩阵为 A^*，$k\ (k\neq 0)$ 为常数，则行列式 $|(kA)^*|=$ ______ ；

4、当 $\lambda=$ ______ 时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$ 无解。

5、设 A 为 秩 $R(A)=2$ 的 5×3 阶矩阵，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&0&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 秩 $R(AB)=$ ______ ；

6、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则系数中 a 的值应为 ______；

7、已知 $1,2,3$ 为矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的三个特征值，则 a,b,c 的值应分别为 $a=$ ______ ，$b=$ ______ ，$c=$ ______ ；

8、实数域上全体四阶对称矩阵对矩阵加法和数乘运算构成的线性空间是 ______ 维的；

9、设 $f(x)=x^3+ax^2+b,(a\neq 0)$，则 $f(x)$ 有重根的充要条件是 ________；

10、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$k$ 为正整数，则 $A^k=$ ________.

二、（15分） 证明：

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} x_j\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right)$$

三、（15分） 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k 使得线性方程组 $A^kX=0$ 有解向量 $\overrightarrow{\alpha}$，且 $A^{k-1}\overrightarrow{\alpha}\neq 0$，证明：向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}, A\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,A^{k-1}\overrightarrow{\alpha_n}$ 线性无关。

四、（15分） 设 A 为 n 阶矩阵 $(n\geq 2)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

（1）若 秩$(A)=n$，则 秩$(A^*)=n$；

（2）若 秩$(A)=n-1$，则 秩$(A^*)=1$；

（3）若 秩$(A)<n-1$，则 秩$(A^*)=0$.

五、（15分） 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型并求出所用的可逆线性变换。

六、（15分） 证明：实对称矩阵正定的充分必要条件是它的特征值全是正数。

七、（15分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & k & k\\ 1 & k & 0 & 1\end{pmatrix},(k\in R)$，

（1）求 A 的零空间的基和维数；

（2）求 A^T 的零空间的基和维数；

（3）求 A 的列向量组生成的向量空间的基和维数。