第一题（25 分）

（1）设一个质量为m的粒子，沿x轴运动，势能为$V(x)$。

a. 写出体系的哈密顿算符$\hat{H}$和定态薛定谔方程。

b. 计算 $[\hat{H},x]$。

c. 对于定态，求动量的平均值$<p>$（仅考虑平方可积的态）。

（2）考虑下面算符

$$\hat{A}\psi(x)=x^3\psi(x), \qquad \hat{B}\psi(x)=x\frac{d\psi(x)}{dx},$$

其中$\psi(x)$是任意波函数，求对易式$[\hat{A},\hat{B}]$。

第二题（25 分）

设粒子在下面势阱中运动，

$$V(x)=\begin{cases}V_0\ (\text{常数}), & 0\le x\le a\\ \infty & \text{其余区域。}\end{cases}$$

（1）求粒子的能量本征值和归一化本征函数。

（2）设$t=0$时其波函数是

$$\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{4}{5}}\psi_1+\sqrt{\frac{1}{5}}\psi_2$$

其中ψ_1,ψ_2 分别是基态和第一激发态的波函数。求t时刻的波函数$\psi(x,t)$。

第三题（25 分）

（1） 写出轨道角动量算符各分量$(\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z)$的对易式。

（2） 设粒子处于$Y_{lm}(\theta,\varphi)$状态下，求L_x, L_y, L_x^2, L_y^2各量的平均值。

第四题（25 分）

考虑一个二维物理系统，其态空间的正交归一基矢为$|\psi_1>$和$|\psi_2>$。算符$\hat{Q}$在以$|\psi_i>$为基矢的表象中表示为

$$Q=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}。$$

（1）求Q的本征值。

（2）现定义新的基矢：

$$|\phi_1>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1>+|\psi_2>) \text{ 和 } |\phi_2>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1>-|\psi_2>)。$$

计算$\hat{Q}$在以$|\phi_i>$为基矢表象中的矩阵，并评论Q和$|\phi_i>$的关系。

第五题（25 分）

考虑被严格限制在范围$0\le x\le a$内（即无限深势阱，阱内势能为零）两个全同玻色子体系。

（1）　如果两个粒子无相互作用，求基态和第一激发态的波函数和对应的能量。

（2）　如果两粒子通过势

$$V(x_1,x_2)=aV_0\delta(x_1-x_2)$$

有微弱的相互作用（V_0是常数）。利用微扰理论计算能量的一级修正值。

第六题（25 分）

（1）　证明：厄米算符的本征值必为实数。

（2）　证明：厄米算符的属于不同本征值的本征函数彼此正交。

（3）　证明：在一维的情况下，$\frac{d<p>}{dt}=<-\frac{\partial V}{\partial x}>$，其中$<p>$是动量的平均值，$V$是势能。