考试科目：(665)数学分析　　共 1 页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

1. （15 分）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

2. （15 分）求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\tan^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+\sin^4 x}-1}$.

3. （20 分）证明：若 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，则至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得

$$f(1)=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(2)-f''(\xi)\right].$$

4. （20 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3^n\cdot n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3^n\cdot n!}$ 的和.

5. （20 分）在 $[0,\ \pi]$ 上把 $f(x)=x^2$ 展开成正弦级数.

6. （20 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的连续性与可微性.

7. （20 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma} yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 在 xoz 平面的右侧部分的外侧。

8. （20 分）

（1）证明：数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(1+n)\right\}$ 收敛;

（2）若记 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(1+n)\right)$，证明：$\lim\limits_{p\to 0^+}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+p}}-\dfrac{1}{p}\right)=\gamma$.